

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Радіотехнічний факультет**

**Кафедра радіотехнічних пристроїв та систем**

«На правах рукопису»  
УДК \_\_\_\_\_

До захисту допущено:  
Завідувач кафедри  
\_\_\_\_\_ Сергій ЖУК  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 р.

**Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**за освітньо-професійною програмою**

**«Радіотехнічні інформаційні технології»**

**зі спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»**

**на тему: «Математична модель цифрового приймача квадратурних  
видів модуляції»**

Виконав:  
студент II курсу, групи РТ-91мп  
Терещенко Олександр Володимирович \_\_\_\_\_

Керівник:  
к.т.н., доц. кафедри РТПС  
Шпилька Олександр Олександрович \_\_\_\_\_

Рецензент:  
ст. викладач кафедри ТОР  
Захарченко Оксана Степанівна \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.  
Студент \_\_\_\_\_

Київ – 2020 року

**Національний технічний університет України**  
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**  
**Радіотехнічний факультет**  
**Кафедра радіотехнічних пристроїв та систем**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 172 «Телекомунікації та радіотехніка»

Освітньо-професійна програма «Радіотехнічні інформаційні технології»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Сергій ЖУК

«\_\_2\_\_» вересня 2020р.

**ЗАВДАННЯ**  
**на магістерську дисертацію студенту**  
**Терещенку Олександрову Володимировичу**

1. Тема дисертації «Математична модель цифрового приймача квадратурних видів модуляції», науковий керівник дисертації Шпилька Олександр Олександрович, к.т.н., доц. кафедри РТПС, затверджені наказом по університету від «\_\_05\_\_» листопада 2020 р. № \_\_3223-с

2. Термін подання студентом дисертації 14 грудня 2020

3. Об'єкт дослідження — сигнали з квадратурною модуляцією

4. Вихідні дані \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- 1) дослідити основні підходи до пеленгації джерел електромагнітного випромінювання;
- 2) розглянути методи амплітудної пеленгації;
- 3) провести порівняльний аналіз існуючих методів;
- 4) розробити структурну схему пеленгатора з поліпшеними характеристиками;
- 5) визначити конструкцію та основні параметри антено-фідерного тракту;

б) проаналізувати характеристики запропонованої структури пеленгатора.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:  
Презентація результатів дослідження.

7. Орієнтовний перелік публікацій : тези доповіді на конференції РТФ

8. Дата видачі завдання 2 вересня 2020р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
	Усвідомлення завдання МД	2.09 по 12.09.2020	
	Виконанням завдань 1 - 2 розділу	13.09 по 1.10.2020	
	Виконанням завдань 3 - 4 розділу	2.10 по 14.10.2020	
	Виконанням завдань 5 - 6 розділу	15.10 по 12.11.2020	
	Виконанням завдань 7 розділу	13.11 по 6.12.2020	
	Подання МД на рецензію	7.12.2020	
	Подання МД секретарю комісії з захисту робіт	14.12.2020	

Студент

Олександр ТЕРЕЩЕНКО

Науковий керівник

Олександр ШПИЛЬКА

## РЕФЕРАТ

Обсяг пояснювальної записки магістерської дисертації становить 100 сторінок, які включають в себе 7 розділів, 38 ілюстрації, 19 таблицю, 8 бібліографічних найменувань за переліком джерел посилань.

**Ключові слова:** сигнал, фазова синхронізація, символна синхронізація, інтерполяція, детектор помилок.

**Актуальність теми дослідження:** Одним з найважливіших вузлів в цифрових системах зв'язку являється приймач. Якість його функціонування забезпечує якість функціонування системи в цілому. Як відомо пристрої, що реалізують цифрові методи обробки сигналів являються більш гнучкими, тому актуальність вибраної тематики не викликає сумнівів.

**Мета дослідження:** створити математичну модель цифрового приймача квадратурних видів модуляції для проведення досліджень впливу параметрів як каналу зв'язку так і параметрів цифрових сигналів.

**Об'єкт дослідження:** сигнали з квадратурною модуляцією.

**Предмет дослідження:** математичні моделі.

**Завдання.**

1. Розглянути методи фазової та символної синхронізації.
2. Оцінити переваги та недоліки методів.
3. Розробити математичну модель синхронізації
4. Дослідити вплив параметрів моделі на працездатність системи

**Методи дослідження:** для отримання результатів в даній роботі використовувався метод статистичного моделювання.

**Наукова новизна одержаних результатів:** поєднано два методи фазової синхронізації та розроблено математичну модель для вирішення поставленої задачі.

**Практичне значення одержаних результатів:** В результаті виконання роботи було розроблено модель приймача наближена до реальних умов.

## ABSTRACT

The volume of the explanatory note of the master's dissertation is 100 pages, which include 7 sections, 38 illustrations, 19 tables, 8 bibliographic names according to the list of reference sources.

**Key words:** signal, phase synchronization, symbolic synchronization, interpolation, error detector.

**Relevance:** One of the most important nodes in digital communication systems is the receiver. The quality of its operation ensures the quality of the system as a whole. As you know, devices that implement digital methods of signal processing are more flexible, so the relevance of the selected topic is not in doubt

The purpose of the study: to create a mathematical model of a digital receiver of quadrature types of modulation to study the influence of parameters of both the communication channel and the parameters of digital signals.

**Object of research:** signals with quadrature modulation.

**Subject of research:** mathematical models.

### **Task.**

1. Consider the methods of phase and symbol synchronization.
2. Evaluate the advantages and disadvantages of the methods.
3. Develop a mathematical model of synchronization
4. Investigate the influence of model parameters on the system performance

**Research methods:** the method of statistical modeling was used to obtain results in this work.

Scientific novelty of the obtained results: two methods of phase synchronization are combined and a mathematical model for solving the problem is developed.

**Practical significance of the obtained results:** As a result of the work, a receiver model close to real conditions was developed.

## ЗМІСТ

Перелік скорочень.....	8
Вступ.....	9
1 Смугові радіосигнали .....	11
1.1 Комплексна огибающая. Векторне представлення сигналу.....	12
1.2 Універсальний квадратурний модулятор .....	15
2 Квадратурний гетеродин .....	18
2.1 Комплексна огибающая при частотній розстройці гетеродина.....	22
2.2 Вплив частотної розстройки на амплітудну огибающую прийнятого сигналу .....	24
2.3 Вплив частотної розстройки на повну фазу комплексної огибающей прийнятого сигналу.....	25
3 Передача сигналу по вузькосмугових каналах .....	27
3.1 Міжсимвольна інтерференція та формуючий фільтр .....	27
3.2 Формуючий фільтр Найквіста для усунення МСІ.....	30
3.3 Фільтр припіднятого косинуса .....	34
4 Фазова синхронізація носійної .....	40
4.1 Методи частотно-фазової синхронізації.....	40
4.2 Евристичний фазовий детектор помилок .....	45
4.3 Детектор помилок фази максимальної ймовірності.....	48
5 Часова синхронізація символів.....	50
5.1 Детектор часових помилок.....	53
5.1.1 Детектор часових помилок переходу через нуль (Zero-Crossing Timing Error Detector) .....	54

5.2 Інтерполяція.....	56
5.2.1 Кусково-поліноміальна інтерполяція. ....	59
5.3 Інтерполяційний контроль .....	64
6 Математична модель приймача .....	66
6.1 Опис моделі .....	66
6.2 Результати моделювання.....	67
Висновки .....	72
Список використаної літератури .....	73

## ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

АМ — Амплітудна модуляція  
АЦП — Аналого-цифровий перетворювач  
АЧХ — Амплітудно-частотна характеристика  
КІХ — Кінцево-імпульсна характеристика  
МСІ — Міжсимвольна інтерференція  
УФ — Узгоджений фільтр  
ФАПЧ — Фазова автопідстройка частоти  
ФНЧ — Фільтр низьких частот  
ЦАП — Цифро-аналоговий перетворювач  
ЦСЧ — Цифровий синтезатор частот  
BPSK — Binary phase shift keying  
ML — Maximum Likelihood  
QAM — Quadrature amplitude modulation  
QPSK — Quadrature phase shift keying  
TED — Timing error detectors



## ВСТУП

Цифрові види модуляції використовуються для передачі кодованих повідомлень дискретними методами. Сутність цифрової модуляції полягає в тому, що передається безперервний сигнал дискретизується в часі, квантується за рівнем і отримані відліки, які прямують у дискретні моменти часу, перетворюються в кодові комбінації. Отриманою послідовністю кодових відеосигналів модулюється високочастотний сигнал-переносник.

Отже, цифрові методи модуляції засновані на трьох необхідних перетвореннях корисних безперервних сигналів: дискретизації, квантування і кодування.

Перевагами цифрових методів модуляції є:

- висока стійкість навіть при використанні каналів з нестабільними характеристиками і великим рівнем шумів;
- можливість регенерації (відновлення) сигналів у вузлах зв'язку мереж, що значно послаблює ефект накопичення спотворень сигналів при передачі інформації по лініях великої протяжності;
- універсальна форма представлення сигналів для різних повідомлень (мова, телевізійне зображення, дискретні дані, команди управління роботою пристроїв зв'язку і т.п.);
- низька чутливість до нелінійних спотворень в груповому тракті багатоканальних систем;
- відносно просте узгодження цих систем з комп'ютерами і електронними автоматичними телефонними станціями, що грає важливу роль для побудови мереж зв'язку;
- можливість автоматизації передачі та обробки сигналів за допомогою комп'ютерів.

Основними недоліками систем з цифровими методами передачі сигналів є значне розширення займаної смуги частот каналів, необхідність забез-

печення точної синхронізації сигналів. Одним з найважливіших вузлів в цифрових системах зв'язку являється приймач. Якість його функціонування забезпечує якість функціонування системи в цілому. Як відомо пристрої, що реалізують цифрові методи обробки сигналів являються більш гнучкими, тому актуальність вибраної тематики не викликає сумнівів.

# 1 СМУГОВІ РАДІОСИГНАЛИ

При передачі інформації в радіотехніці використовуються смугові радіосигнали. Модулюючим сигналом  $s_m(t)$  будемо називати низькочастотний інформаційний сигнал (мова, цифрова інформація і т.д.), який потрібно передати на частоті  $\omega_0 \gg \omega_\epsilon$ , де  $\omega_\epsilon$  - верхня частота спектра модулюючого сигналу. Смуговими сигналами назвемо сигнали, чий спектр зосереджений в деякій смузі  $\Pi$  біля несучої частоти  $\omega_0$ . На малюнку 1.1 наведені спектри модулюючого (червоний) і смугового (синій) сигналів.

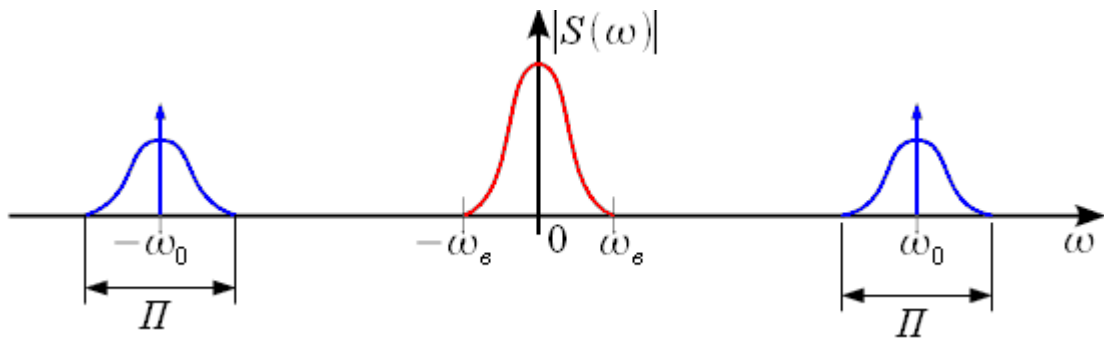


Рисунок 1.1 — Спектр модульованого і смугового сигналів

Оскільки сигнали реальні, то їх спектри симетричні щодо нульової частоти. Перенесення модулюючого сигналу  $s_m(t)$  на несучу частоту  $\omega_0$  називається модуляцією.

Розглянемо способи модуляції, для цього розглянемо носійне коливання  $s_{\text{нос}}(t)$  вираз (1.1)

$$s_{\text{нос}}(t) = a \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.1)$$

де  $a$  - амплітуда носійного коливання,  $\varphi$  - початкова фаза. Також можна ввести поняття повної фази носійного коливання (1.2)

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi \quad (1.2)$$

а також миттєвої частоти сигналу, як похідну від повної фази (1.3)

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad (1.3)$$

Миттєва частота носійного сигналу - постійна величина рівна  $\omega_0$ . Таким чином при модуляції ми можемо керувати всього двома параметрами носійного коливання: амплітудою і повною фазою. При управлінні тільки амплітудою отримаємо амплітудну модуляцію і всі її похідні, при управлінні повною фазою отримаємо кутову модуляцію (фазова і частотна). При управлінні і амплітудою і повною фазою можна отримати всі відомі види модуляції. Тепер можна розглянути загальний запис смугового сигналу (1.4)

$$s(t) = a(t) \cos(\varphi(t)) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (1.4)$$

де  $a(t)$  — закон зміни амплітуди носійного коливання, а  $\varphi(t)$  — зміна фази носійного коливання відповідно в з модулюючим сигналом.

### 1.1 Комплексная огибающая. Векторное представление сигнала

Введемо поняття комплексної огибающей і векторного представлення сигналу [1]. Для цього розглянемо комплексний сигнал

$$z(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) + j \cdot a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (1.5)$$

З виразу (1.5) можна помітити, що  $\operatorname{Re}[z(t)] = s(t)$ , тобто реальна частина комплексного сигналу збігається з смуговим радіосигналом. За формулою Ейлера можна записати в наступному вигляді

$$z(t) = a(t) \exp(j \cdot (\omega_0 t + \varphi(t))) = \underbrace{a(t) \exp(j \cdot \varphi(t))}_{Z_m(t)} \cdot \exp(j \omega_0 t) \quad (1.6)$$

Таким чином (1.7)

$$z(t) = z_m(t) \exp(j\omega_0 t) \quad (1.7)$$

Виділений сигнал  $z_m(t) = a(t) \exp(j\varphi(t))$  зветься комплексною огибаючою сигналу  $z(t)$ . Розглянемо його властивості. Сигнал  $z_m(t)$  є комплексним, зі змінними в часі амплітудою та фазою, причому зміна амплітуди сигналу  $z_m(t)$  повністю збігається зі зміною амплітуди радіосигналу  $s(t)$ , а зміна фази повністю збігається зі зміною фази радіосигналу  $s(t)$ . Однак відсутність множника  $\exp(j\omega_0 t)$  говорить про те що сигнал  $z_m(t)$  являє собою «перенесений на нульову частоту комплексний сигнал  $z(t)$ ». Комплексна огибаюча сигналу істотно спрощує його аналіз.

Будь-яке комплексне число можна представити у вигляді точки на комплексній площині або вектора який виходить з 0 до цієї точки, а комплексний сигнал можна трактувати як комплексну функцію часу, тобто вектор який описує на комплексній площині деяку траєкторію в плині часу, як це показано на рисунку 1.2.

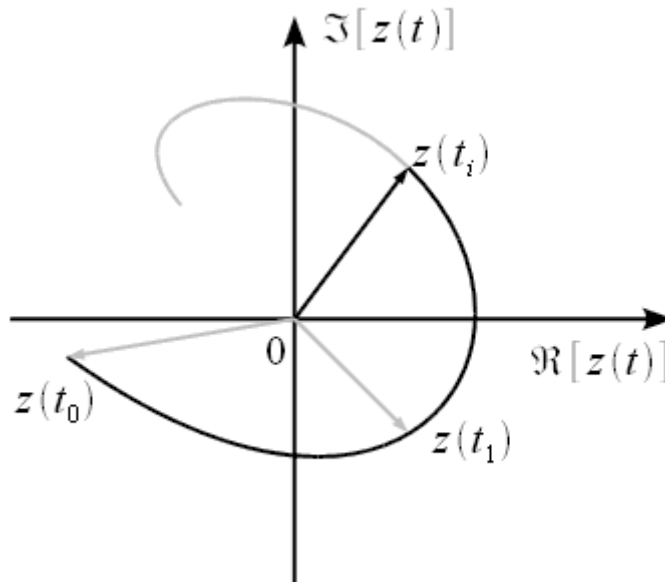


Рисунок 1.2 — Векторне подання комплексного сигналу

Тоді комплексну експоненту  $\exp(j\omega_0 t)$  на комплексній площині можна уявити вектором одиничної амплітуди який повертається за одну секунду на кут  $\omega_0$ , здійснюючи при цьому  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  обертів в секунду. Таким чином при спостереженні за  $\exp(j\omega_0 t)$  ми побачимо коло одиничного радіусу яке креслить вектор з частотою  $f_0$ . При цьому одиничне коло буде спотворюватися сигналом  $z_m(t) = a(t)\exp(j\varphi(t))$ , а саме протягом часу вектор  $z(t)$ , буде змінювати амплітуду відповідно до  $a(t)$  і швидкість обертання відповідно до  $\varphi(t)$ . Так ось комплексна амплітуда дозволяє нам зупинити обертання вектора з частотою  $f_0$  і подивитися як змінюється його амплітуда і фаза під час обертання.

Тепер повернемося до розгляду комплексної обвідної.  $z_m(t)$  можна представити у вигляді реальної та уявної частин (1.8)

$$z_m(t) = a(t)\exp(j\varphi(t)) = \underbrace{a(t)\cos(\varphi(t))}_{I(t)} + j \cdot \underbrace{a(t)\sin(\varphi(t))}_{Q(t)} \quad (1.8)$$

де  $I(t) = a(t)\cos(\varphi(t))$  — синфазна складова комплексної обвідної (або координата по осі абсцис), а  $Q(t) = a(t)\sin(\varphi(t))$  — квадратурна складова (або координата по осі ординат, як це показано на рисунку 1.3)

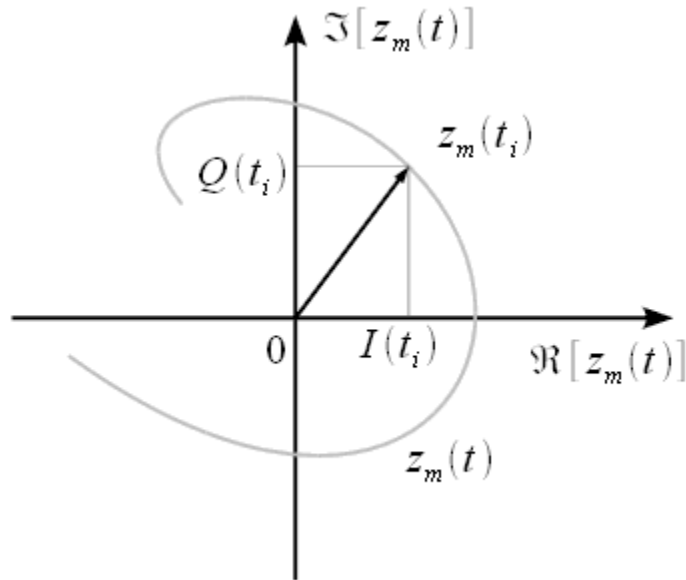


Рисунок 1.3 — Векторне представлення комплексної обвідної

## 1.2 Універсальний квадратурний модулятор

Тепер повернемося до вираження комплексного сигналу (1.7), підставивши в нього вираз для комплексної обвідної (1.8)

$$\begin{aligned}
 z(t) &= (I(t) + j \cdot Q(t)) \exp(j\omega_0 t) = \dots \\
 &\dots = (I(t) + j \cdot Q(t)) \cos(\omega_0 t) + j \cdot \sin(\omega_0 t) = \dots \\
 &\dots = I(t) \cos(\omega_0 t) - Q(t) \sin(\omega_0 t) + \dots \\
 &\dots + j \cdot (I(t) \sin(\omega_0 t) + Q(t) \cos(\omega_0 t))
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Тоді з виразу (9) смуговий сигнал дорівнює (1.10)

$$s(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = I(t) \cos(\omega_0 t) - Q(t) \sin(\omega_0 t) \quad (1.10)$$

Таким чином, якщо є модулюючий сигнал, з якого сформовані синфазна і квадратурна компоненти комплексної обвідної сигналу, то можна перенести її на будь-яку частоту за допомогою схеми універсального квадратурного перетворювача, представлені на рисунку 1.4 [1].

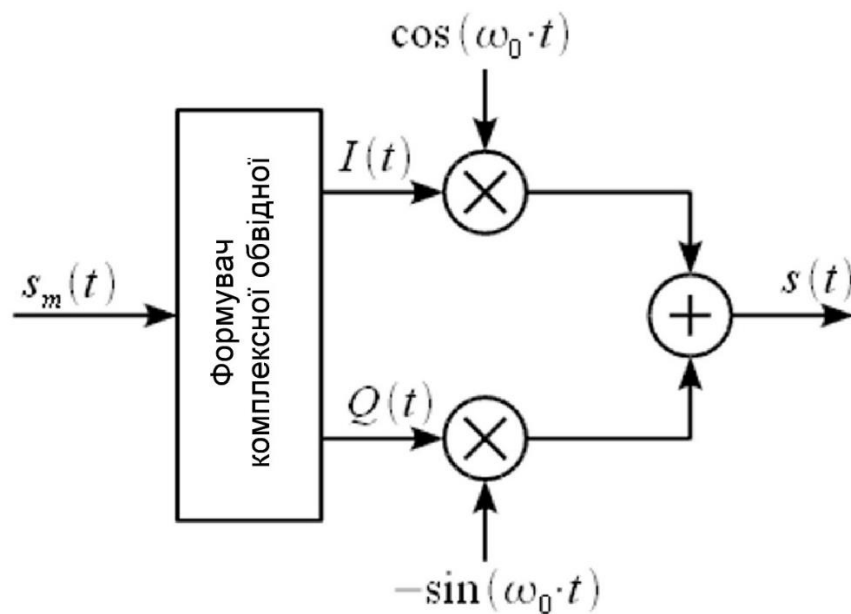


Рисунок 1.4 — Універсальний квадратурний модулятор

Якщо зауважити, що  $\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega_0 t)$  то схему універсального квадратурного модулятора можна уявити як показано на рисунку 1.5.



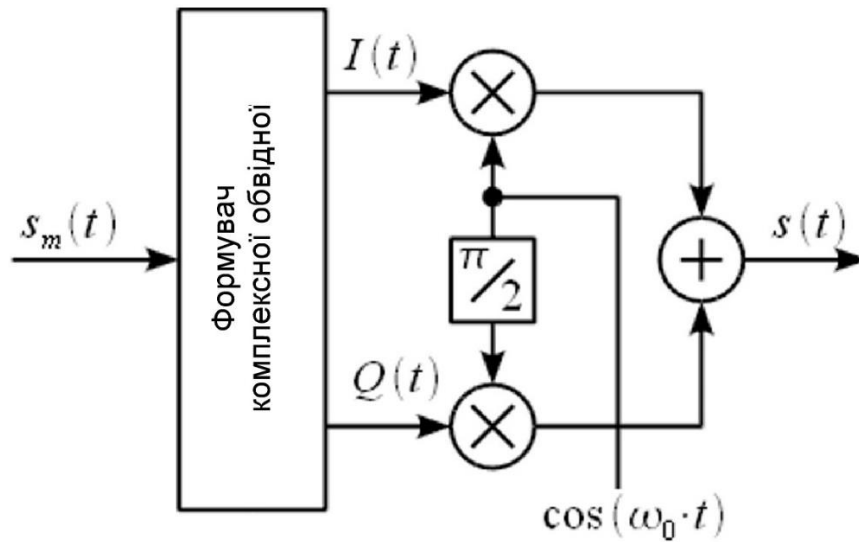


Рисунок 1.5 — Універсальний квадратурний модулятор з фазообертачем

Оскільки початковий модулюючий сигнал є низькочастотним, то формування комплексної обвідної можна робити в цифровому вигляді. Спосіб формування комплексної обвідної в залежності від модулюючого сигналу визначає вид модуляції. Схема представлена на рисунку 1.5 підходить для всіх цифрових і аналогових видів модуляцій.

## 2 КВАДРАТУРНИЙ ГЕТЕРОДИН

Структурна схема квадратурного гетеродина представлена на малюнку 2.1.

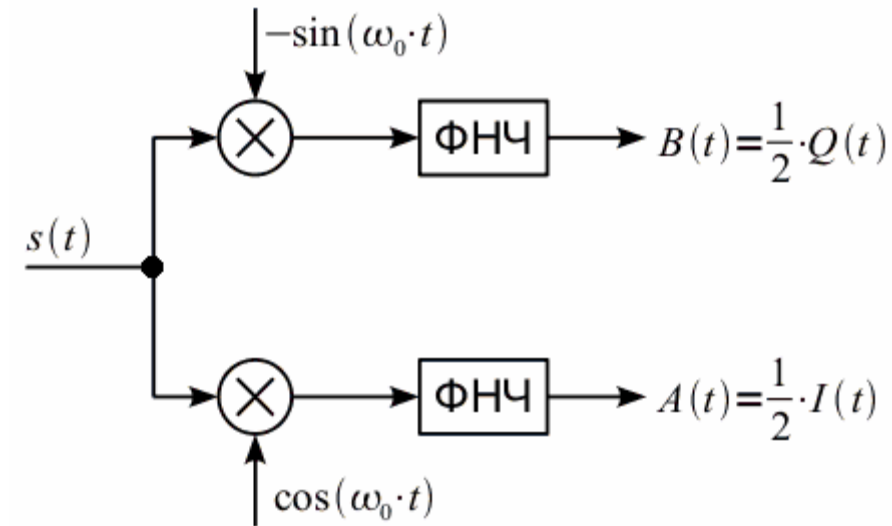


Рисунок 2.1 — Структурна схема квадратурного гетеродина

Якщо врахувати, що  $-\sin(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$  то можна отримати схему квадратурного гетеродина з фазообертачем, представлену на рисунку 2.3.

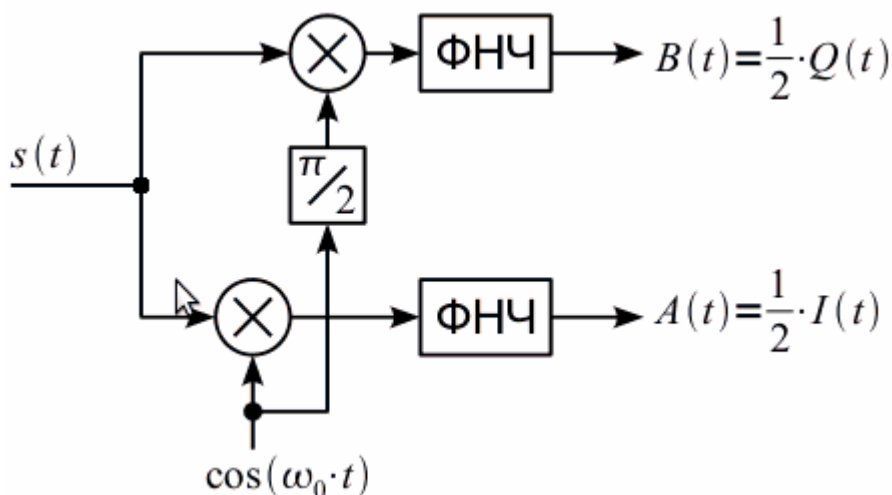


Рисунок 2.3 — Структурна схема квадратурного гетеродина з фазообертачем

### Вимоги до ФНЧ квадратурного гетеродина. Придушення по дзеркальному і сусідньому каналах

Нам необхідно сформулювати вимоги до фільтрів нижніх частот, що входять в квадратурний гетеродин. Для цього розглянемо спектр  $Z_0(\omega)$  комплексного сигналу  $z_0(t)$  а також амплітудно-частотну характеристику ФНЧ, представлені на рисунку 2.4 1-й та 2-й графіки відповідно.

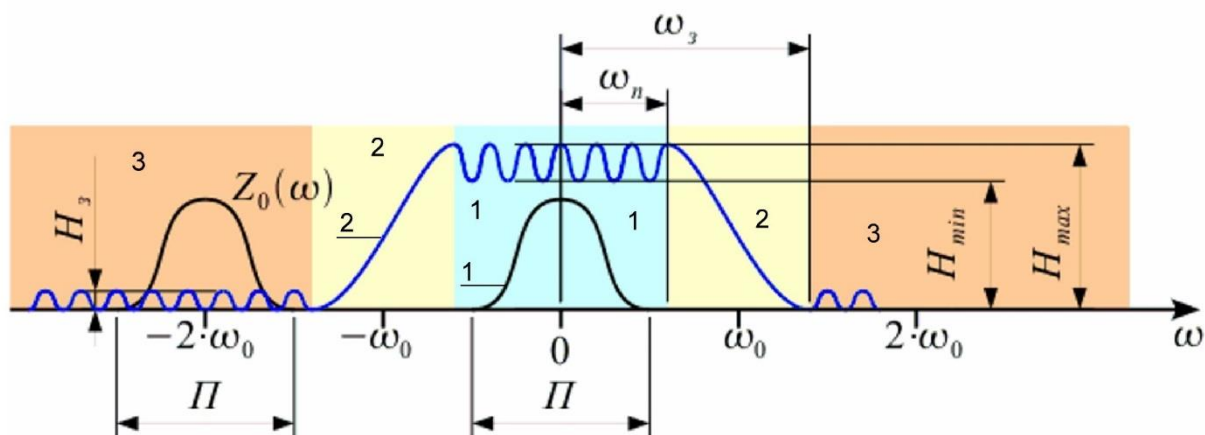


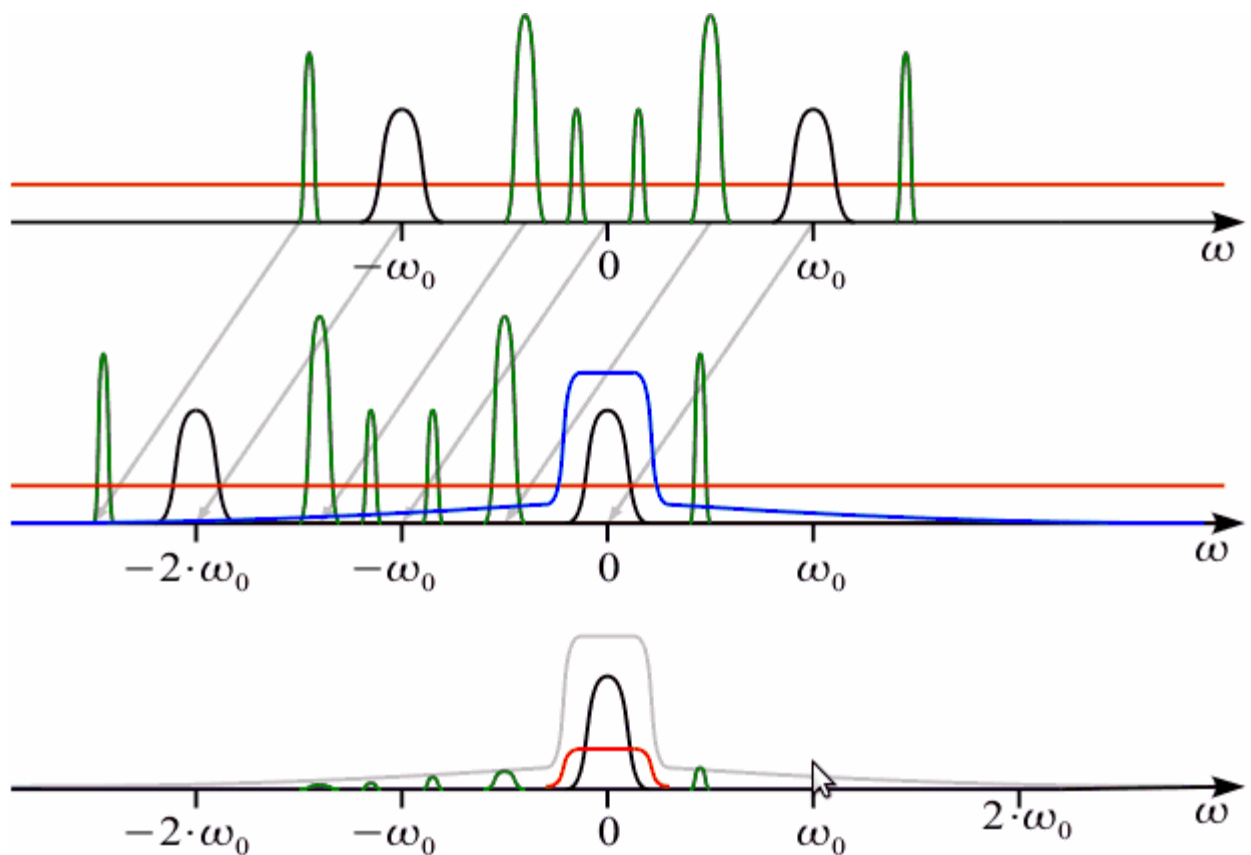
Рисунок 2.4 — Вимога до частотної характеристики фільтра квадратурного гетеродина

Нехай початковий смуговий сигнал мав смугу  $\Pi$  тоді спектр  $Z_0(\omega)$  матиме дві складові з смугою  $\Pi$  з центральними частотами рівними 0 та  $-2\omega_0$ . Для

того щоб сформулювати вимоги до ФНЧ необхідно задати чотири параметри: частоту пропускання  $\omega_n$  (або частота зрізу) нижче якої сигнал буде пропускатися з мінімальними спотвореннями (1-ша область), частоту загородження  $\omega_z$  вище якої всі спектральні складові будуть придушені (3-тя область), нерівномірність в смузі пропускання  $\Delta H_n$  задає максимально допустимий рівень спотворень сигналу в смузі пропускання, і нарешті коефіцієнт придушення в смузі загородження  $H_z$  задає у скільки разів буде придушений сигнал в смузі загородження. Зона між смугою пропускання і смугою загородження (2-га зона). Нерівномірність у смузі пропускання ФНЧ задається як відношення максимального  $H_{\max}$  і мінімального  $H_{\min}$  значень АЧХ ФНЧ в смузі пропускання (2.1)

$$\Delta H_n = \frac{H_{\max}}{H_{\min}} \quad (2.1)$$

Для того щоб пропустити сигнал зі смугою  $\Pi$  в районі нульової частоти, необхідно щоб частота пропускання  $\omega_n \geq \frac{\Pi}{2}$ , при цьому спотворення в смузі пропускання повинні бути якомога менші  $\Delta H_n \rightarrow 1$  (0 дБ) або  $H_{\min}$  повинен прямувати до  $H_{\max}$ . Для подавлення сигналу на частоті  $-2\omega_0$  необхідно щоб частота загородження була  $\omega_z < 2\omega_0 - \frac{\Pi}{2}$ , а коефіцієнт подавлення  $H_z \rightarrow 0$ . При наявності шумів і сусідніх каналів доцільно зменшувати перехідну смугу ФНЧ, тобто частоту загородження вибирати якомога ближче до частоти пропускання. В цьому випадку ФНЧ задає селективні властивості приймача по сусідньому і дзеркальному каналах. Покажемо це на прикладі наведеному на малюнку 2.5.



Малюнок 2.5 — Вибір ФНЧ для забезпечення вибіркової приймача по сусідньому і дзеркальному каналах при квадратурному гетеродинуванні

Нехай вхідний сигнал являє собою суму смугового сигналу на несучій частоті  $\omega_0$  з симетричним відносно нуля спектром позначених чорною лінією, кількох сусідніх каналів, спектри яких позначені зеленим, і адитивного шуму, спектральна щільність потужності якого показана червоною лінією. Вхідний сигнал подається на квадратурний гетеродин, налаштований на несучу частоту  $\omega_0$  в результаті відбувається перенос спектру на  $\omega_0$  вліво, як це показано стрілочками рис.2.5 від верхнього графіка до середнього. Далі ставиться ФНЧ (АЧХ показана синьою лінією), який виділяє комплексну обгортаючу в районі нульової частоти. Сигнал на виході ФНЧ показаний на нижньому графіку. Видно, що зроблено виділення комплексної обгортаючої сигналу, шум за межами смуги пропускання фільтра подавлений, як і подавлені сусідні канали та дзеркальний канал на частоті  $-2\omega_0$ . Ступінь подавлення сусідніх каналів (вибірковість по сусідньому каналу) дорівнює коефіцієнту передачі

фільтра на частоті сусіднього каналу, а подавлення складових на частоті  $-2\omega_0$  (вибірковість по дзеркальному каналу) дорівнює коефіцієнту передачі ФНЧ на частоті  $-2\omega_0$ . Таким чином можна зробити висновок, що чим більш прямокутна характеристика ФНЧ тим вище селективні властивості приймача [2].

В кінці необхідно зробити зауваження. Оскільки в кожному з каналів квадратурного гетеродина присутній свій ФНЧ, то для якісного прийому необхідна висока ступінь ідентичності характеристик обох ФНЧ.

## 2.1 Комплексна огибаюча при частотній розстройці гетеродина

Нехай смуговий радіосигнал має вигляд (2.2)

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}[z_m(t) \exp(j(\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi_0)] = \dots \\ &\dots = I(t) \cos((\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi_0) - Q(t) \sin((\omega_0 + \Delta\omega)t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

де  $z_m(t) = I(t) + j \cdot Q(t)$  — комплексна огибаюча смугового радіосигналу  $s(t)$ .

Комплексну огибаючу можна представити в показниковій формі (2.3)

$$\begin{aligned} z_m(t) &= I(t) + j \cdot Q(t) = a_m(t) \exp(j\varphi_m(t)) \\ a_m(t) &= \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)} \\ \varphi_m &= \arctan\left(\frac{Q(t)}{I(t)}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

де  $a_m(t)$  — амплітудна огибаюча,  $\varphi_m(t)$  — фазова огибаюча. Також можемо відмітити, що (2.4)

$$\begin{aligned} I(t) &= a_m(t) \cos(\varphi_m(t)) \\ Q(t) &= a_m(t) \sin(\varphi_m(t)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Квадратурний гетеродин налаштований на частоту  $\omega_0$  виділяє дві складові (2.5)

$$\begin{aligned} A(t) &= s(t) \cos(\omega_0 t) \\ B(t) &= -s(t) \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Припустимо частотна розстройка  $\Delta\omega$  мала в порівнянні з несучою частотою і не перевищує смуги сигналу, як це показано на верхньому графіку рисунку 2.6. Тоді після перенесення на нульову частоту за допомогою квадратурного гетеродина отримаємо, що несуча частота зміщена щодо нуля на величину розстройки, також як зміщена і дзеркальна складова щодо подвоєної несучої частоти (середній графік рисунку 2.6). Також припустимо, що частотна характеристика ФНЧ квадратурного гетеродина (середній графік) не спотворює зміщені щодо нуля складові сигналу, але придушує зміщену дзеркальну складову. В результаті на виході ФНЧ залишиться тільки зміщена складова в районі нуля (нижній графік рисунку 2.6).

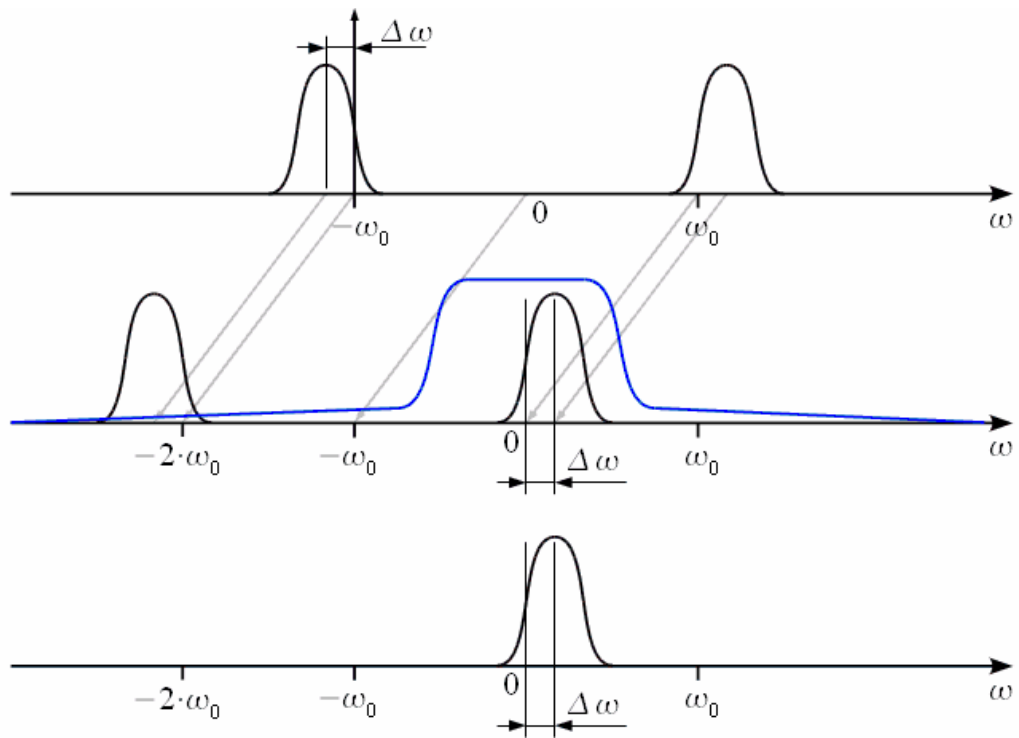


Рисунок 2.6 — Квадратурне гетеродинування при частотній розстройці

Таким чином, в виразах (2.4) і (2.5) фільтром будуть подавлені складові з частотою  $-2\omega_0 - \Delta\omega$  тоді отримаємо (2.6)

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \frac{1}{2}I(t)\cos(\Delta\omega t + \varphi_0) - \frac{1}{2}Q(t)\sin(\Delta\omega t + \varphi_0) \\
 B(t) &= \frac{1}{2}Q(t)\cos(\Delta\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}I(t)\sin(\Delta\omega t + \varphi_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Таким чином синфазна і квадратурні складові на виході квадратурного гетеродина виявляються «заплутаними». Розглянемо як «заплутаність» синфазної і квадратурної складових позначається на оцінці амплітудної і фазової обвідної смугового сигналу[3].

## 2.2 Вплив частотної розстройки на амплітудну огинаючу прийнятого сигналу

Амплітудна огинаюча прийнятого смугового сигналу дорівнює (2.7)



$$\begin{aligned}
a(t) &= \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} = \dots \\
\dots &= \frac{1}{2} \sqrt{(I(t) \cos(\xi) - Q(t) \sin(\xi))^2 + (Q(t) \cos(\xi) + I(t) \sin(\xi))^2} \quad (2.7) \\
\xi &= \Delta \omega t + \varphi_0
\end{aligned}$$

Розкриємо квадрати в підкореневому виразі та спростивши отримаємо (2.8)

$$a(t) = \sqrt{A^2(t) + B^2(t)} = \frac{1}{2} \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)} = \frac{1}{2} a_m(t) \quad (2.8)$$

Можна зробити висновок про те, що частотна розстройка і випадкова початкова фаза не спотворює амплітудну огинаючу прийнятого сигналу (зрозуміло якщо частотна характеристика ФНЧ квадратурного гетеродина, показання на рисунку 2.1, не спотворює зміщені щодо нуля складові сигналу).

### 2.3 Вплив частотної розстройки на повну фазу комплексної огинаючої прийнятого сигналу

Розглянемо фазову огинаючу прийнятого сигналу (2.9)

$$\varphi(t) = \arctan\left(\frac{B(t)}{A(t)}\right) = \arctan\left(\frac{Q(t) \cos(\xi) + I(t) \sin(\xi)}{I(t) \cos(\xi) - Q(t) \sin(\xi)}\right) \quad (2.9)$$

Розглянемо чисельник і знаменник дробу виразу (2.9) з урахуванням виразу (2.4) та спростивши, отримаємо (2.10)

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \arctan\left(\frac{B(t)}{A(t)}\right) = \arctan\left(\frac{a_m(t) \sin(\varphi_m(t) + \xi)}{a_m(t) \cos(\varphi_m(t) + \xi)}\right) = \dots \\
\dots &= \arctan(\tan(\varphi_m(t) + \xi)) = \varphi_m(t) + \xi = \varphi_m(t) + \Delta \omega t + \varphi_0
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Частотна розстройка додає до фазової обвідної лінійний доданок, а випадкова початкова фаза - постійну складову. Результати дозволяють визначити частотну розстройку по куту нахилу обвідної фази, таким чином можна робити частотну підстройку, а оцінка фазової неузгодженості як постійної складової дозволяє компенсувати фазу і забезпечити фазову підстройку частоти. При цьому дуже важливо, що будь-які зміни амплітуди прийнятого сигналу (паразитна АМ) не позначаються на точності оцінки фази і частоти.

## 3 ПЕРЕДАЧА СИГНАЛУ ПО ВУЗЬКОСМУГОВИХ КАНАЛАХ

### 3.1 Міжсимвольна інтерференція та формуючий фільтр

При розгляді BPSK сигналів ми говорили про те, що в якості початкового модулюючого сигналу виступає послідовність прямокутних біполярних імпульсів  $b_0(t)$ , причому імпульс позитивної амплітуди відповідає переданій одиниці, а негативний - нулю, як це показано на рисунку 3.1 для вхідного бітового потоку «10110100 ...».

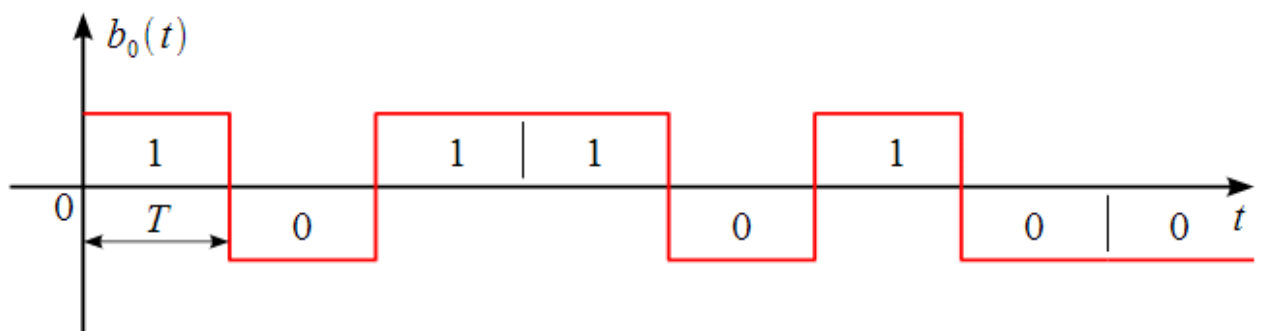


Рисунок 3.1 — Послідовність біполярних імпульсів

Однак такий модулюючий сигнал є ідеальним і володіє спектром, з дуже низькою швидкістю загасання бічних пелюсток. Спектр BPSK сигналу на основі модулюючого сигналу  $b_0(t)$  показаний на рисунку 3.2, має ширину головної пелюстки  $W = 2Br$  (де  $Br$  – швидкість передачі цифрової інформації (біт/с)), рівнем максимального бічного пелюстка -13 дБ, і швидкістю загасання бічних пелюсток як  $\frac{1}{\omega}$ .

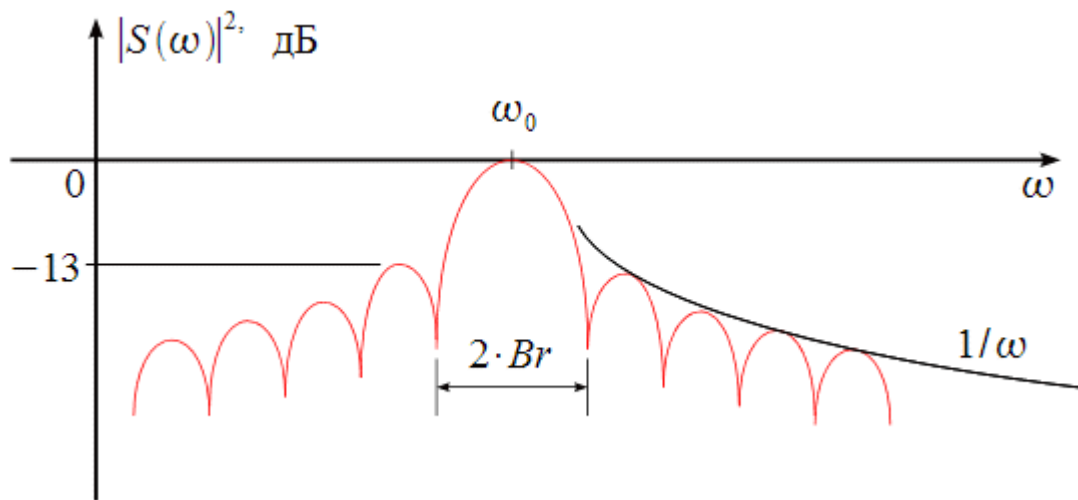


Рисунок 3.2 — Спектр BPSK сигналу

Якщо ж ми обмежимо смугу початкового модулюючого сигналу, це в свою чергу призведе до більш компактного спектру BPSK, але в результаті фронти імпульсів розширяться і отримаємо таку картину (Рисунок 3.3).

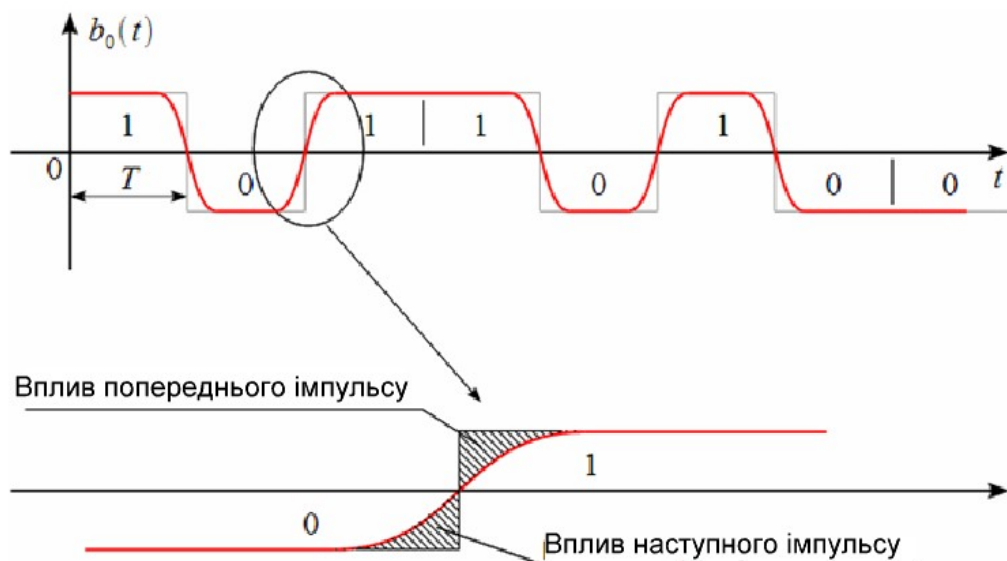


Рисунок 3.3 — Міжсимвольна інтерференція при згладжуванні фронту імпульсу

Згладжування фронтів призводить до того, що наступний і попередній імпульси починають перекриватися в часі, і стрибок переходить в безперервну криву. При згладжуванні попередній імпульс починає впливати на насту-

пний, а наступний на попередній і обидва спотворюються (заштрихована область на рисунку 3.3). Цей ефект називається міжсимвольною інтерференцією MCI, (в англomовній літературі intersymbol interference ISI), він погіршує якість передачі інформації, але дозволяє більш компактно представити сигнал в частотній області [4].

Для того щоб зробити згладжування фронтів імпульсів необхідно обмежити смугу, іншими словами зробити фільтрацію. Тоді початковий модулюючий сигнал,  $b_d(t)$  можна представити як вихід формуючого фільтра з імпульсною характеристикою  $h(t)$ . Фільтр  $h(t)$  повинен збуджуватись сигналом відповідним інформації яка передається як це показано на рисунку 3.4.

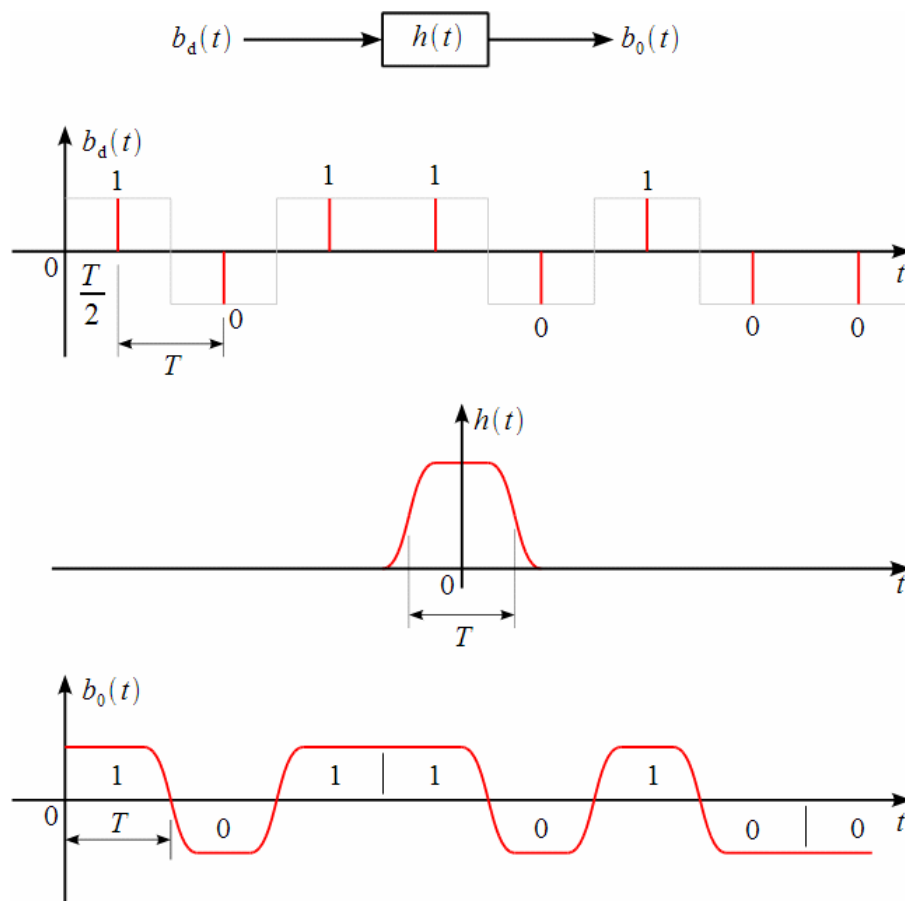


Рисунок 3.4 — Формуючий фільтр, збуджений імпульсами інформації що передається

Сигнал  $b_d(t)$  – набір дельта-імпульсів, віднесених до центру інформаційного

імпульсу, віддалених на тривалість інформаційного імпульсу  $T$  (верхній графік, тонкою лінією показана вихідна інформаційна послідовність біт) можна записати як (3.1)

$$b_d(t) = \sum_i d_i \delta(t - iT - \frac{T}{2}) \quad (3.1)$$

де  $d_i = 1$ , якщо  $i$ -ий інформаційний біт дорівнює 1 та  $d_i = -1$ , якщо  $i$ -ий інформаційний біт дорівнює 0. Тоді пропустивши сигнал  $b_d(t)$  через фільтр з імпульсною характеристикою  $h(t)$ , отримаємо модулюючий сигнал  $b_0(t)$ , як згортку  $b_d(t)$  та  $h(t)$  (3.2)

$$b_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b_d(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

Підставивши (3.1) в (3.2), та змінивши місцями інтегрування і додавання та застосувавши фільтруючу властивість дельта-функції отримаємо (3.3)

$$\begin{aligned} b_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i d_i \delta(\tau - iT - \frac{T}{2}) h(t - \tau) d\tau = \dots \\ &\dots \sum_i d_i \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - iT - \frac{T}{2}) h(t - \tau) d\tau = \dots \\ &\dots = \sum_i d_i h(\tau - iT - \frac{T}{2}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким чином,  $b_0(t)$  повністю визначається імпульсною характеристикою  $h(t)$  і інформацією що передається. Це дуже важливо, оскільки у випадку з BPSK  $b_0(t)$  повністю визначає спектральні характеристики сигналу (нагадаємо, що BPSK є виродженим видом модуляції, що збігається з балансною АМ). Змінюючи імпульсну характеристику  $h(t)$  формуючого фільтра ми можемо звужувати або розширювати смугу BPSK сигналу.

### 3.2 Формуючий фільтр Найквіста для усунення МСІ

Розглянемо якими властивостями повинна володіти  $h(t)$ , щоб забезпечити мінімальну ширину смуги сигналу що передається. Для початку розг-

лянемо більш уважно  $b_d(t)$ . Сигнал  $b_d(t)$  є послідовністю дельта-імпульсів, відповідних біт інформації яка передається і віддалених один від одного на інтервал  $T = \frac{1}{Br}$ . Тоді їх можна трактувати як дискретні відліки сигналу  $b_0(t)$ , взяті з частотою  $Br$ . При проходженні формуючого фільтру  $h(t)$  дуже важливо, щоб  $b_0(t)$  в моменти  $t = \frac{T}{2} + kT$  (тобто у вузлах дискретизації) дорівнювало  $d_k$ , як це показано на рисунку 3.5.

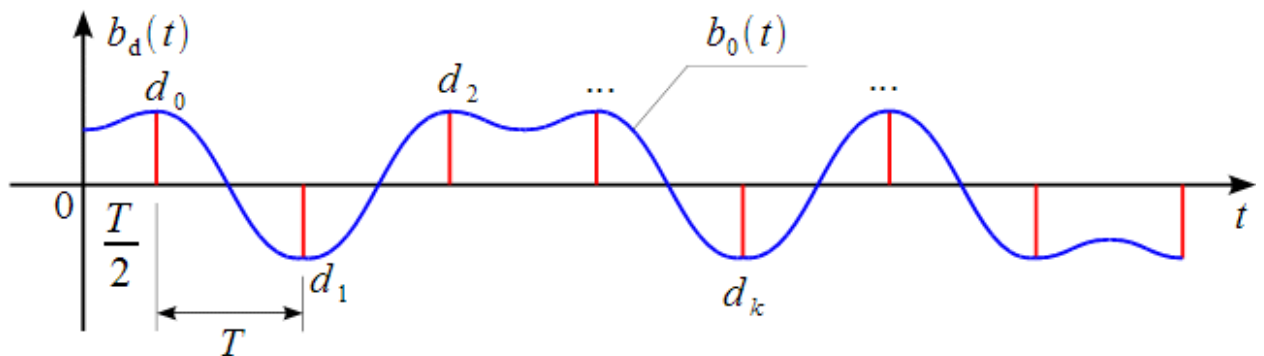


Рисунок 3.5 — Виключення МСІ при декодуванні

Тоді при демодуляції і декодуванні можна виключити вплив МСІ, якщо робити оцінку переданого біта точно в моменти часу  $t = \frac{T}{2} + kT$ , де  $b_0(kT + \frac{T}{2}) = d_k$ . Іншими словами вносячи спотворення у початковий модулюючий сигнал  $b_0(t)$  з метою звуження його смуги ми тим не менше, залишаємо в певні моменти часу його значення незмінними і рівними  $d_k$  (значенням переданої інформації), щоб на приймальній стороні в ці моменти декодувати  $d_k$  без спотворень.

Розглянемо якими властивостями повинна володіти  $h(t)$ , щоб  $b_0(kT + \frac{T}{2}) = d_k$ . Виходячи з (3.3) можемо записати (3.4)

$$\begin{aligned}
 b_0\left(\frac{T}{2} + kT\right) &= \sum_i d_i h\left(\frac{T}{2} + kT - iT - \frac{T}{2}\right) = \dots \\
 \dots &= \sum_i d_i h(T(k-i))
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

де  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Тоді для виключення МСІ необхідно щоб виконувалась рівність (3.5)

$$d_k = \sum_i d_i h(T(k-i)) \tag{3.5}$$

де  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Звідки випливає що  $h(t)$  повинна задовольнити умову (3.6)

$$h(T(k-i)) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k=i \\ 0, & \text{якщо } k \neq i \end{cases} \tag{3.6}$$

Графічно умова (6) показана на рисунку 6.

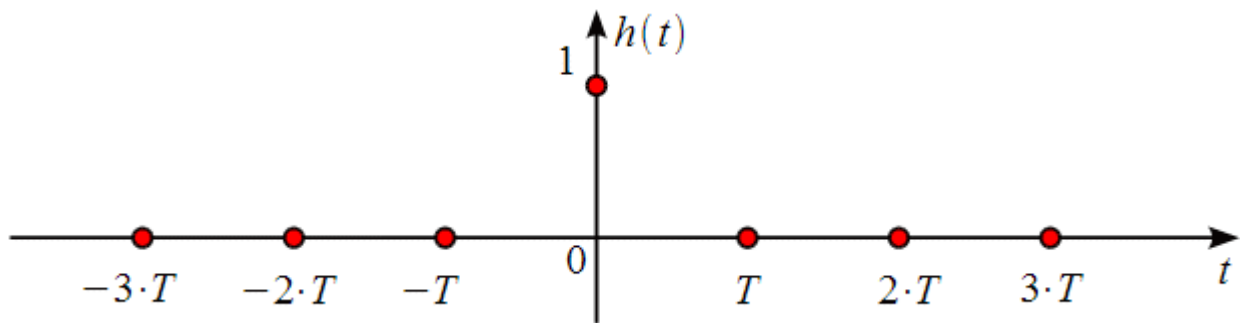


Рисунок 3.6 — Умова імпульсної характеристики формуючого фільтру для виключення МСІ при декодуванні

Зрозуміло можна підібрати нескінченне число імпульсних характеристик  $h(t)$ , які будуть проходити через зазначені точки, але нам потрібна одна, яка буде при цьому забезпечувати мінімальну ширину смуги сформованого сигналу. Такою імпульсною характеристикою формуючого фільтру є (3.7)

$$h(t) = \text{sinc}\left(\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)}{\pi \frac{t}{T}} \tag{3.7}$$



показана на рисунку 3.7 (верхній графік), яка відповідає ідеальному ФНЧ з смугою  $Br = \frac{1}{T}$  (нижній графік).

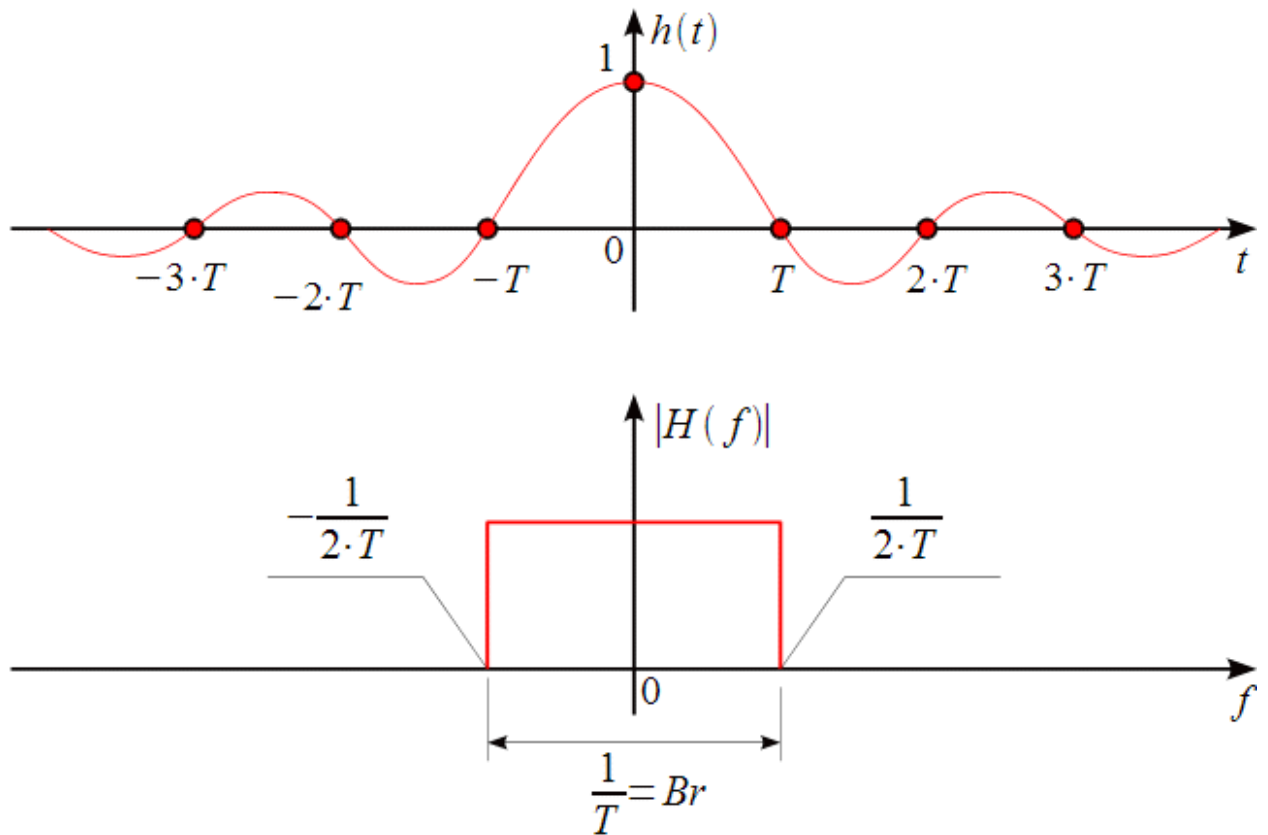


Рисунок 3.7 — Імпульсна характеристика ідеального формуючого фільтра

Імпульсна характеристика (3.7) є фізично нездійсненною, у вигляді нескінченних «хвостів» затухаючих у часі як  $\frac{1}{t}$ , але вона дозволяє сформувати теоретичну межу передачі інформації без МСІ. Так при передачі по каналу зв'язку цифрової інформації зі швидкістю  $Br$  без МСІ потрібна смуга  $\Pi \geq Br$ . Для передачі інформації без МСІ треба не менше 1 Гц смуги на 1 біт/с швидкості передачі інформації. Наприклад в полосі 1 МГц без МСІ можна передати цифровий потік зі швидкістю не більше 1 Мбіт/с.

Сигнал на виході формуючого фільтра можна представити як його реакція на входні дельта-імпульси що відповідають початковому бітовому потоку, рисунок 3.8.

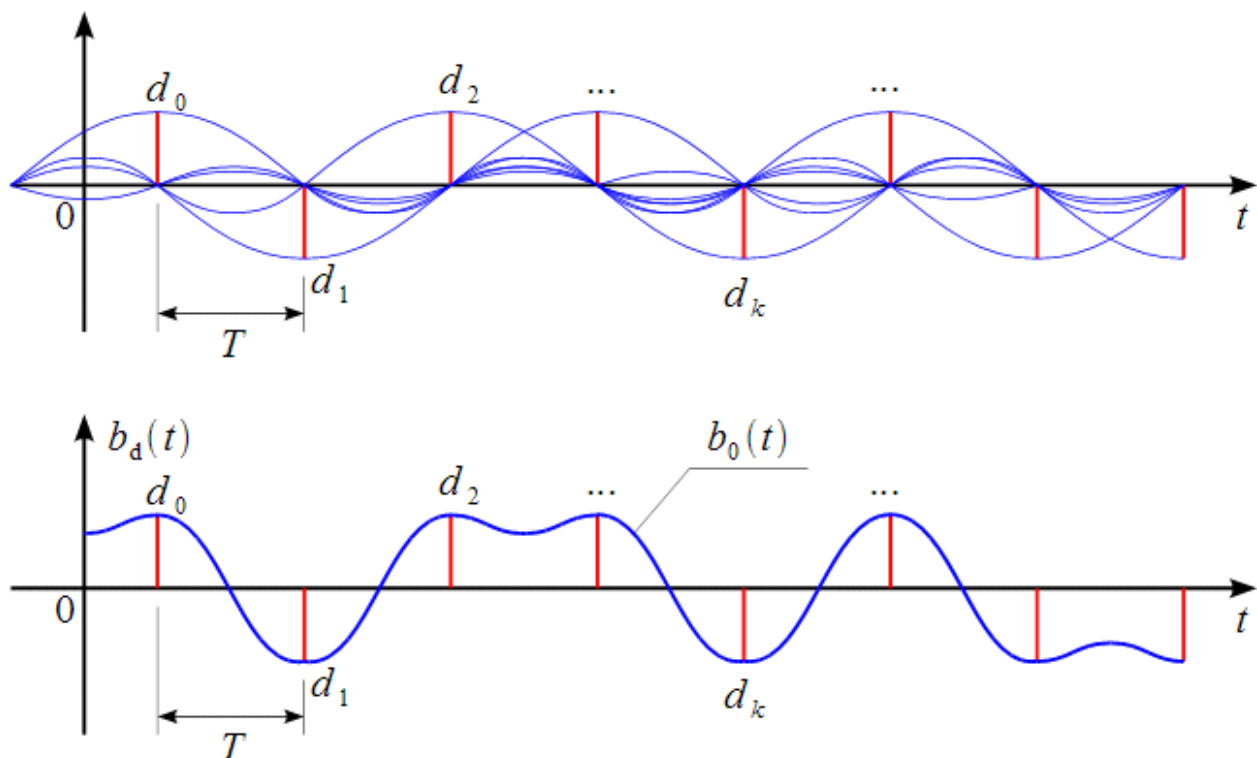


Рисунок 3.8 — Формуючий фільтр як інтерполятор

На верхньому графіку рисунку 3.8 кожен символ інформації  $d_k$  множиться на імпульсну характеристику (3.7), тоді у вузлах дискретизації імпульсні характеристики від інших інформаційних імпульсів дорівнюють нулю і МСІ в моменти взяття  $d_k$  відсутня. Ми отримали інтерполятор у вигляді ідеального ФНЧ, який «з'єднує»  $d_k$  плавною кривою, при цьому самі  $d_k$  не спотворює.

### 3.3 Фільтр припіднятого косинуса

Імпульсна характеристика (3.7) не може бути реалізована. Тому на практиці нескінченну  $h(t)$  доводиться обрізати по тривалості, при цьому формуючий фільтр перестає бути ідеальним інтерполятором. На рисунку 3.9 показана обрізана імпульсна характеристика  $h(t_n)$  формуючого фільтру в залежності від нормованого часу  $t_n = \frac{t}{T}$  ( $t_n = 1$  відповідає одному символу інформації яка передається). Імпульсна характеристика  $h(t_n)$  обрізана до 4-х сим-

волів інформації що передається, тобто  $h(t_n) = 0$  при  $|t_n| > 4$ . Також на рисунку 3.9 показаний квадрат АЧХ  $|H(f_n)|^2$  формуючого фільтра що відповідає обрізаній  $h(t_n)$ . АЧХ будувалася в залежності від нормованої частоти

$$f_n = fT = \frac{f}{Br}.$$

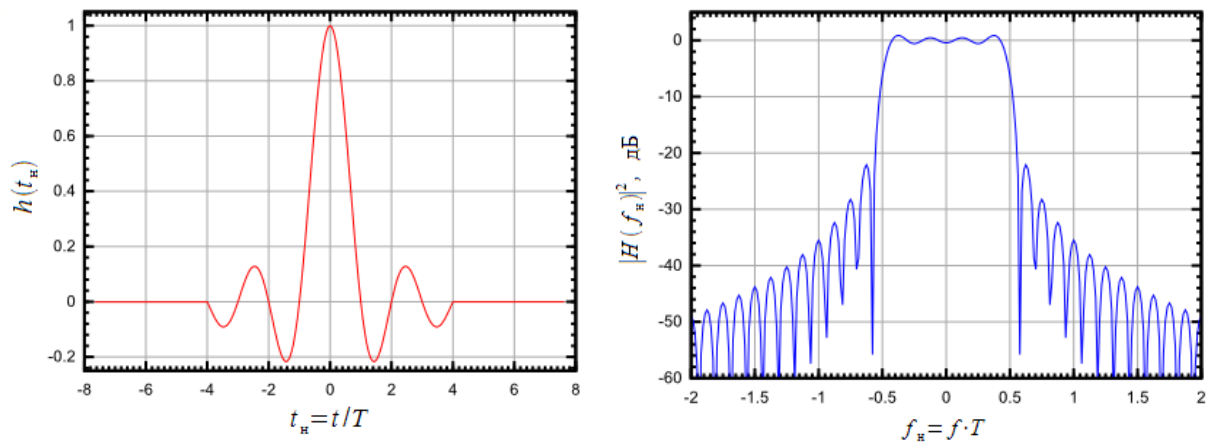


Рисунок 3.9 — Обрізана імпульсна характеристика та АЧХ формуючого фільтра

З рисунку 3.9 видно що укорочення імпульсної характеристики призводить до появи бічних пелюсток в АЧХ формуючого фільтра. При цьому рівень бічних пелюсток є дуже високим, а швидкість спаду дуже низькою. Крім того з'являється нерівномірність в смузі пропускання фільтра. Цей ефект називається ефектом Гіббса. Для його зменшення Найквістом було запропоновано провести згладжування фронту АЧХ ідеального фільтра, розширивши його, але на відміну від  $h(t)$  це розширення смуги фільтра можна зробити регульованим, як це показано на малюнку 3.10.

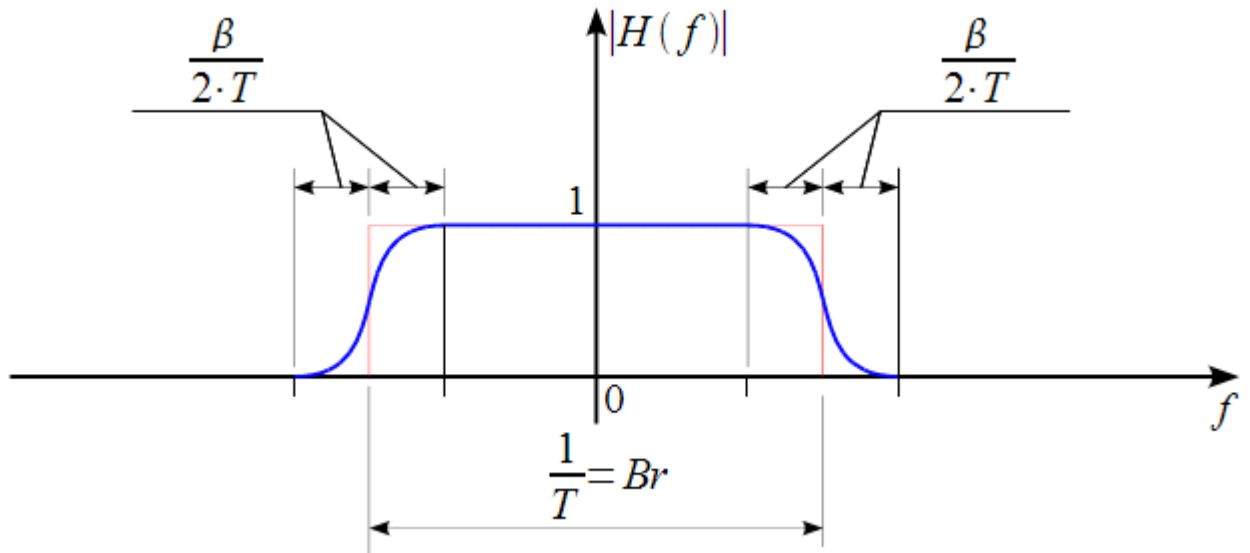


Рисунок 3.10 — Формуючий фільтр Найквіста при апроксимації фронту АЧХ припіднятим косинусом

АЧХ фільтра розбивається на шматки та описується виразом (3.8)

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |f| < \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi T}{\beta} \left[ |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right] \right) \right), & \text{якщо } \frac{1-\beta}{2T} < |f| < \frac{1+\beta}{2T} \\ 0, & \text{якщо } |f| > \frac{1+\beta}{2T} \end{cases} \quad (3.8)$$

Поблизу фронту ідеальна АЧХ апроксимується функцією припіднятого косинуса. Параметр  $\beta$ , який змінюється від 0 до 1 задає інтервал на якому відбувається апроксимація. При  $\beta = 0$  маємо ідеальний ФНЧ, при  $\beta = 1$  маємо формуючий фільтр з АЧХ у вигляді припіднятого косинуса (3.9)

$$|H(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos(\pi T f)), & \text{якщо } f < \frac{1}{T} \\ 0, & \text{якщо } f > \frac{1}{T} \end{cases} \quad (3.9)$$

Згладжування фронту в частотній області відповідно до теореми про згортку відповідає добутку імпульсної характеристики (3.7) та вагового вікна (3.10)

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) w(t)$$

$$w(t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi \beta t}{T}\right)}{\frac{1 - 4\beta^2 t^2}{T^2}} \quad (3.10)$$

На рисунку 3.11 показані імпульсні характеристики  $h(t_n)$  фільтра Найквіста при різному  $\beta$ , в залежності від нормованого часу  $t_n = \frac{t}{T}$ , а також їх АЧХ  $|H(f_n)|$  в залежності від нормованої частоти  $f_n = fT$ .

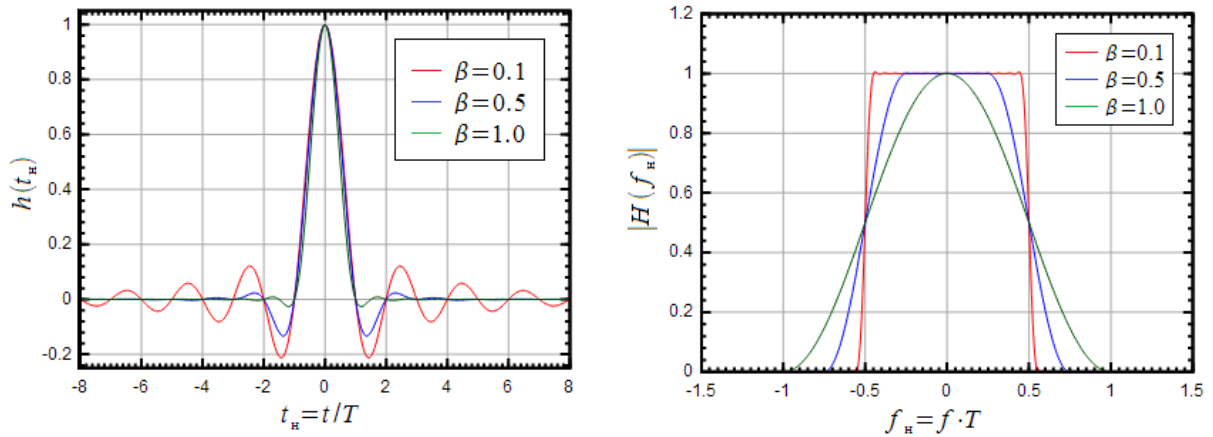


Рисунок 3.11 — Імпульсна характеристика та АЧХ фільтра Найквіста

З рисунку 3.11 видно, що  $\beta$  регулює ступінь згладжування фронту АЧХ ідеального фільтра, що відповідає рівню бічних пелюсток імпульсної характеристики  $h(t_n)$ . При  $\beta = 1$  АЧХ фільтра  $|H(f_n)|$  приймає вигляд припіднятого косинуса, а імпульсна характеристика  $h(t_n)$  має мінімальні бокові пелюстки. Видно, що смуга фільтра Найквіста за рівнем 0.5 (-3 дБ) залишається постійною і дорівнює  $\frac{1}{T}$ .

Формуючий фільтр для узгодженого прийому сигналів. Фільтр «корень из приподнятого косинуса»

На малюнку 3.12 показана збільшена схема системи передачі цифрової інформації.



Рисунок 3.12 — Збільшена схема системи передачі цифрової інформації

На практиці прийом і декодування, як правило здійснюється за допомогою узгодженого фільтра  $G(f)$ . Припустимо, що модулятор і передавач, а також приймач і демодулятор ідеальні, тобто сигнал на вході узгодженого фільтра  $G(f)$  дорівнює сигналу на виході формуючого фільтра  $X(f)$  плюс адитивний білий гаусів шум (AWGN). Тоді загальна частотна характеристика  $H(f)$  дорівнює добутку  $H(f) = G(f) \cdot X(f)$ . Для виключення МСІ необхідно щоб  $H(f)$  задовольняла вираз (3.8). При цьому можна помітити, що  $G(f)$  повинен бути узгоджений з початковим сигналом на виході формуючого фільтра  $X(f)$ , це означає, що  $G(f) = \overline{X(f)}$  (комплексно-спряжена з формуючим фільтром). Тоді  $|X(f)|^2 = H(f)$ , а  $X(f) = \sqrt{H(f)}$ .

При використанні узгодженого фільтра для декодування, його частотна характеристика повинна бути комплексно-спряженою частотній характеристиці формуючого фільтра. Тоді якщо частотна характеристика формуючого фільтра буде являти собою корінь з піднесеного косинуса, то каскад з формуючого та узгодженого фільтрів буде давати саме фільтр Найквіста, який дозволить усунути МСІ при декодуванні.

На малюнку 3.13 показана імпульсна характеристика і АЧХ фільтра «припіднятого косинуса»  $h(t_n)$ ,  $t_n = \frac{t}{T}$  і фільтра «корінь з припіднятого косинуса»  $x(t_n)$  при  $\beta = 0.5$ . Також показані АЧХ цих фільтрів  $|H(f_n)|$  і  $|X(f_n)|$  в залежності від нормованої частоти  $f_n = fT$ .

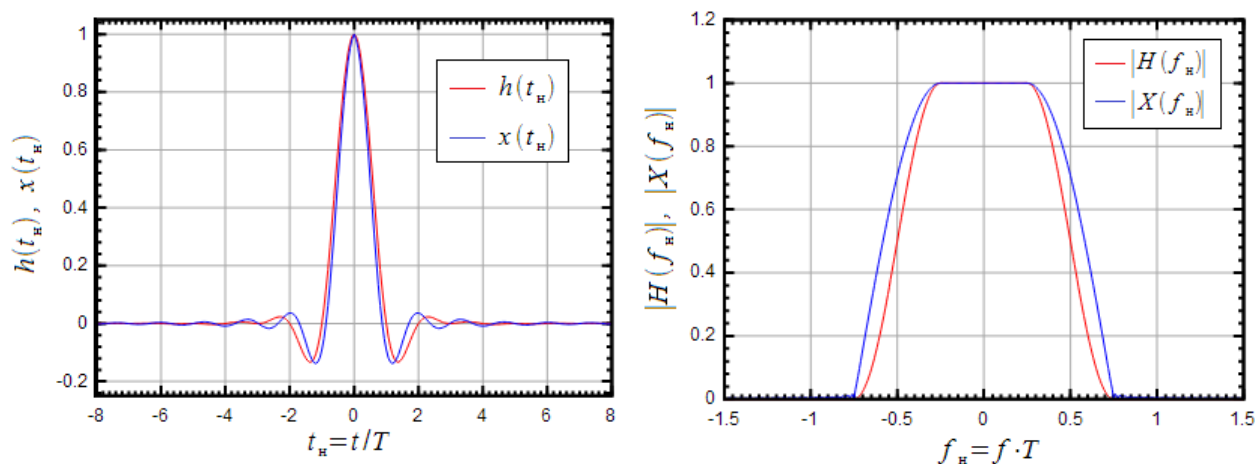


Рисунок 3.13 — Імпульсна характеристика та АЧХ фільтра «корінь з припіднятого косинуса»

Можна помітити, що фільтр «корінь припіднятого косинуса» не задовольняє умову відсутності МСІ (дивись рисунок 3.6), однак якщо поставити послідовно два таких фільтра, то МСІ усувається.

## 4 ФАЗОВА СИНХРОНІЗАЦІЯ НОСІЙНОЇ

У різних областях радіотехніки широко використовують системи авто-регулювання швидкості періодичних процесів для отримання визначених фазових співвідношень між ними. Такі системи називають системами фазової синхронізації. Реалізація таких систем заснована на принципах фазової авто-підстройки, яка працює наступним чином, в приймачі формується сигнал, що представляє приблизну оцінку очікуваного вхідного сигналу. Порівнюючи і перевіряючи ступінь подібності цих сигналів, кільце ФАПЧ постійно коригує опорний сигнал на виході підстроюваного генератора (ПГ), враховуючи у ній поточні зміни реального вхідного сигналу. Для таких систем характерною наявністю фазового детектора та регулятора швидкості ПГ.

За допомогою систем фазової синхронізації вирішується ряд завдань: синхронізація носійних коливань, синхронізація та демодуляція підносійних та модулюючих коливань, синхронізація та демодуляція двійкових символів цифрової інформації, синхронізація та згортка псевдовипадкової послідовності в системах зв'язку з використанням широкосмугових сигналів.

### 4.1 Методи частотно-фазової синхронізації

Смуга пропускання MQAM може бути записана як (4.1):

$$r(t) = G_a \sum_k \left\{ a_0(k) p(t - kT_s) \sqrt{2} \cos(\omega_0 t + \theta) - a_1(k) p(t - kT_s) \sqrt{2} \sin(\omega_0 t + \theta) \right\} + w(t) \quad (4.1)$$

де  $a_0(k)$  та  $a_1(k)$  синфазна та квадратурна складові  $k$ -го символу;  $p(t)$  одиниця енергії імпульсу на проміжку  $-L_p T_s \leq t \leq L_p T_s$ ;  $T_s$  тривалість символу;  $\Omega_0$  центральна частота рад/с;  $\theta$  невідомий зсув фази носійної;  $w(t)$  адитивний білий Гаусівський шум. Константа  $G_a$  являє собою підсилення амплітуди, втрати в антені, середовище розповсюдження, підсилення, змішувачі,



фільтри та інші ВЧ компоненти. Частота дискретизації прийнятого сигналу дорівнює  $\frac{1}{F_s}$  семпл/с.  $n$ -та вибірка прийнятого сигналу дорівнює (4.2):

$$r(nT) = G_a \sum_k a_0(k) p(nT - kT_s) \sqrt{2} \cos(\Omega_0 n + \theta) - a_1(k) p(nT - kT_s) \sqrt{2} \sin(\Omega_0 n + \theta) + w(nT) \quad (4.2)$$

де  $\Omega_0 = \omega_0$ .

Існує два підходи оцінки фази носійної [5]. Перший підхід рисунку 4.1, регулює фазу квадратури синусоїди, що використовуються для перенесення сигналу з ПЧ в смугу модулюючих сигналів I/Q. Другий підхід відрізняється від першого тим, що він використовує квадратурні синусоїди з фіксованою частотою та фазою для перенесення на частоту основної смуги I/Q. Компенсація зміщення фази несучої виконується після узгодженого фільтра зі зменшеною частотою дискретизації.

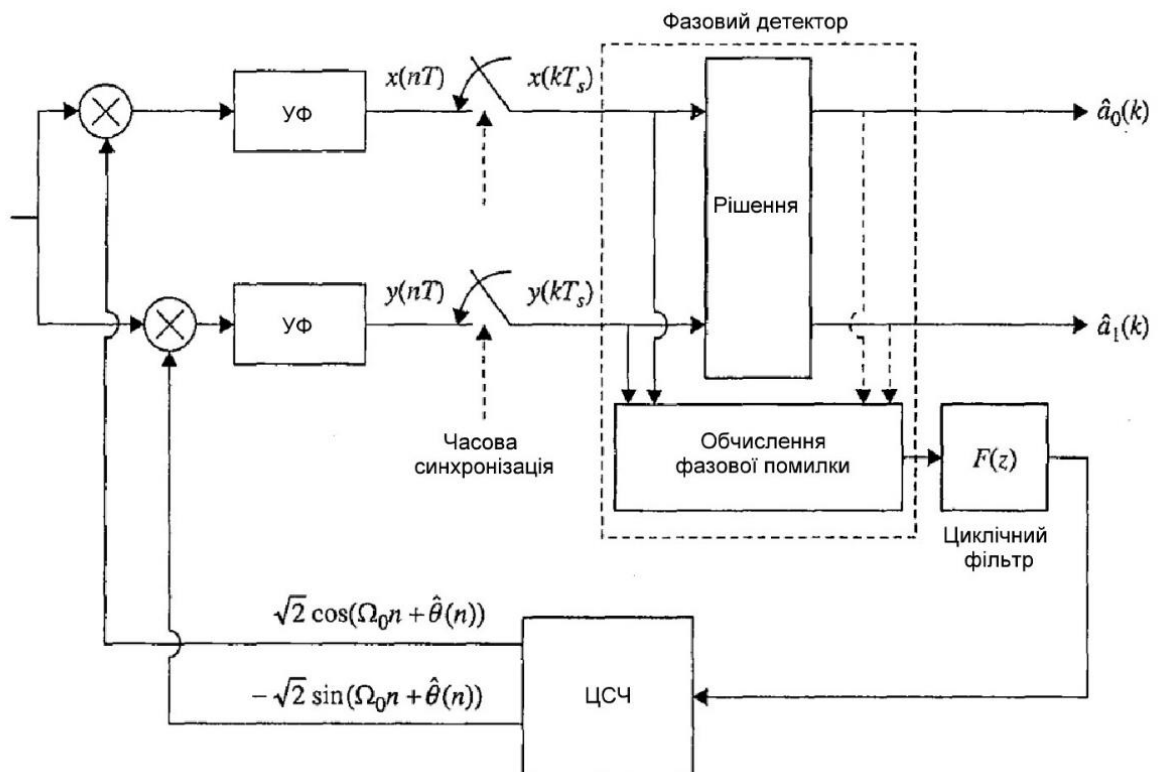


Рисунок 4.1 — Схема фазової синхронізації носійної

Прийнятий сигнал переноситься в base-band діапазон за допомогою множення на  $\sqrt{2} \cos(\Omega_0 n + \hat{\theta}(n))$  і  $-\sqrt{2} \sin(\Omega_0 n + \hat{\theta}(n))$  які отримуємо від ЦСЧ. Отримавши синфазну та квадратурну складові, нехтуючи членами з подвійною частотою отримаємо (4.3)

$$\begin{aligned} I(nT) &= G_a \sum_k \left\{ a_0(k) p(nT - kT_s) \cos(\theta - \hat{\theta}(n)) - a_1(k) p(nT - kT_s) \sin(\theta - \hat{\theta}(n)) \right\} + w_I(nT) \\ Q(nT) &= G_a \sum_k \left\{ a_0(k) p(nT - kT_s) \sin(\theta - \hat{\theta}(n)) + a_1(k) p(nT - kT_s) \cos(\theta - \hat{\theta}(n)) \right\} + w_Q(nT) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Синфазна та квадратурна складові попадають на вхід УФ, з імпульсною характеристикою  $p(-nT)$ , на виході УФ отримуємо складові (4.4):

$$\begin{aligned} x(nT) &= \frac{G_a}{T} \sum_k \left\{ \left[ a_0(k) \cos(\theta - \hat{\theta}(n)) - a_1(k) \sin(\theta - \hat{\theta}(n)) \right] r_p(nT - kT_s) \right\} + v_I(nT) \\ y(nT) &= \frac{G_a}{T} \sum_k \left\{ \left[ a_0(k) \sin(\theta - \hat{\theta}(n)) + a_1(k) \cos(\theta - \hat{\theta}(n)) \right] r_p(nT - kT_s) \right\} + v_Q(nT) \end{aligned} \quad (4.4)$$

де,  $r_p(u)$  - автокореляційна функція (4.5)

$$r_p(u) = \int_{-L_p T_s}^{L_s T_s} p(t) p(t - u) dt \quad (4.5)$$

$$v_I(nT) = p(-nT) * w_I(nT) \text{ та } v_Q(nT) = p(-nT) * w_Q(nT)$$

Припустивши що час синхронізації ідеальний,  $x(nT)$  та  $y(nT)$  вибираються з

кроком  $n = \frac{kT_s}{T} = kN$  продукуючи сигнал, що відповідає квадратурним скла-

довим  $k$ -го символу. Коли форма імпульсу задовольняє критерій Найквіста та відсутня міжсимвольна інтерференція  $r_p(0) = 1$  та  $r_p(mT_s) = 0$  для  $m \neq 0$  тоді

отримуємо вираз (4.6)

$$\begin{aligned} x(kT_s) &= K \left[ a_0(k) \cos(\theta - \hat{\theta}(kN)) - a_1(k) \sin(\theta - \hat{\theta}(kN)) \right] + v_I(kT_s) \\ y(kT_s) &= K \left[ a_0(k) \sin(\theta - \hat{\theta}(kN)) + a_1(k) \cos(\theta - \hat{\theta}(kN)) \right] + v_Q(kT_s) \end{aligned} \quad (4.6)$$

де  $K = \frac{G_a}{T}$ .

Ефект некомпенсованого зсуву фази носійної  $\theta - \hat{\theta}(kN)$  більш очевидно якщо 4.6 перетворити в матричне рівняння (4.7).

$$\begin{bmatrix} x(kT_s) \\ y(kT_s) \end{bmatrix} = K \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta - \hat{\theta}(kN)) & -\sin(\theta - \hat{\theta}(kN)) \\ \sin(\theta - \hat{\theta}(kN)) & \cos(\theta - \hat{\theta}(kN)) \end{bmatrix}}_{\text{повернута\_матриця}} \begin{bmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I(kT_s) \\ v_Q(kT_s) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Це показує що точка  $x(kT_s)$ ,  $y(kT_s)$  є повернутою версії точки  $a_0(k)$ ,  $a_1(k)$ . Кут повороту являє собою некомпенсовану фазову помилку  $\theta - \hat{\theta}(kN)$  в напрямленні проти годинникової стрілки. Повернута точка масштабується на  $K$  та відхиляється від положення обертання на адитивний шум.

Другий метод проілюстровано на рисунку 4.2. В даному підході фіксована квадратурна частота використовується для перенесення прийнятого сигналу в base-band діапазон, а фазова компенсація виконується після виходу УФ. Фазова компенсація реалізована по принципу «обертання проти годинникової стрілки» [5].

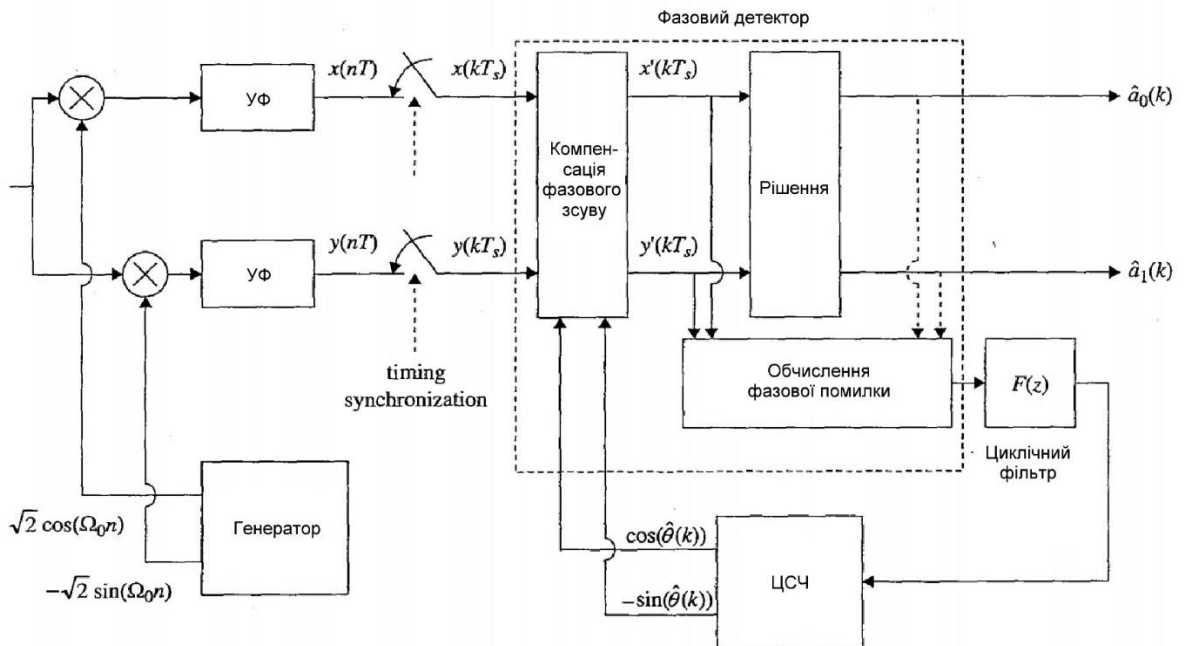


Рисунок 4.2 — Схема фазової синхронізації носійної

Припустимо що квадратурні синусоїди що використовуються для перенесення в base-band діапазон,  $\sqrt{2}\cos(\Omega_0 n)$  і  $-\sqrt{2}\sin(\Omega_0 n)$  квадратурні складові сигналу обчислюються за наступними кроками використаними при розрахунку (7.3) до (7.6). Квадратурні складові сигналу задаються як (4.8)

$$\begin{aligned} x(kT_s) &= K[a_0(k)\cos(\theta) - a_1(k)\sin(\theta)] + v_I(kT_s) \\ y(kT_s) &= K[a_0(k)\sin(\theta) + a_1(k)\cos(\theta)] + v_Q(kT_s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

В матричній формі (4.9),

$$\begin{bmatrix} x(kT_s) \\ y(kT_s) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_I(kT_s) \\ v_Q(kT_s) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Семпли на виході УФ  $x(kT_s)$ ,  $y(kT_s)$  повернуті на оцінений зсув фази носійної  $\hat{\theta}(k)$ . DSS забезпечує оцінку фази носійної як  $\cos(\hat{\theta}(k))$  та  $-\sin(\hat{\theta}(k))$ .

Точка  $x(kT_s)$ ,  $y(kT_s)$  повернута на  $-\hat{\theta}(k)$  для формування квадратурних складових сигналу (4.10)

$$\begin{bmatrix} x'(kT_s) \\ y'(kT_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}(k)) & \sin(\hat{\theta}(k)) \\ -\sin(\hat{\theta}(k)) & \cos(\hat{\theta}(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT_s) \\ y(kT_s) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Цей взаємозв'язок визначає роботу блоку «Компенсація фазового зсуву» що зображений на рисунку 4.2. За допомогою (4.9) повернуті квадратурні складові сигналу можна записати наступним чином (4.11) (4.12)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'(kT_s) \\ y'(kT_s) \end{bmatrix} &= K \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}(k)) & \sin(\hat{\theta}(k)) \\ -\sin(\hat{\theta}(k)) & \cos(\hat{\theta}(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \cos(\hat{\theta}(k)) & \sin(\hat{\theta}(k)) \\ -\sin(\hat{\theta}(k)) & \cos(\hat{\theta}(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_I(kT_s) \\ v_Q(kT_s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{bmatrix} x'(kT_s) \\ y'(kT_s) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos(\theta - \hat{\theta}(k)) & -\sin(\theta - \hat{\theta}(k)) \\ \sin(\theta - \hat{\theta}(k)) & \cos(\theta - \hat{\theta}(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v'_I(kT_s) \\ v'_Q(kT_s) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Вираз (4.12) ідентичний виразу (4.7) за винятком того, що оцінка фази  $\hat{\theta}$  в (4.7) вибирається з частотою  $\frac{1}{T}$  семплів/с тоді як  $\hat{\theta}$  в (4.12) вибирається з частотою  $\frac{1}{T_s}$  семплів/с. Це показує що квадратурні складові сигналу  $x(kT_s)$ ,  $y(kT_s)$  є повернутою версією точки сузір'я  $a_0(k)$ ,  $a_1(k)$  де кут повороту це фазова помилка  $\theta - \hat{\theta}(k)$ .

Фаза носійної ФАПЧ формується замкнутим контуром створеним фазовим детектором, циклічним фільтром та ЦСЧ що показано на рисунку 4.2. Коло ФАПЧ блокується, коли сигнал про помилку наближається до нуля. Сигнал про помилку генерується блоком «Обчислення фазової помилки» за допомогою повернутих квадратурних складових сигналу (або оцінки символів даних) що описано далі. Сигнал помилки пропорційний некомпенсованій фазовій помилці  $\theta - \hat{\theta}(k)$ . Таким чином петля блокується коли  $\hat{\theta}(k)$  дорівнює  $\theta$

Оскільки семпли на виході УФ утворюють дискретні часові послідовності цей підхід є суто дискретним. Крім того ФАПЧ працює з одним семплом/символ на відміну від ФАПЧ що використовується в першому підході, який працює з  $N$  семплами/символ [6].

## 4.2 Евристичний фазовий детектор помилок

Фазова синхронізація несучої для QPSK починається з розробки детектора фазової помилки, заснованого на евристичних міркуваннях, які базуються на основних принципах того, що має бути виконано. Потім вводиться детектор фазової помилки з максимальною ймовірністю. Підкреслимо що він пов'язаний з евристичним детектором фазових помилок. Загальний підхід, викладений на рисунку 4.2, є основою для розробки [5].

Розглянемо фазовий синхронізатор несучої QPSK, проілюстрований на малюнку 4.2. Синфазна та квадратурна складові на виході УФ,  $x(kT_s)$  та

$y(kT_s)$ , повернуті на  $-\hat{\theta}_k$ , намагаючись вирівняти ці складові сигналу  $x'(kT_s)$ ,  $y'(kT_s)$  з однією із чотирьох точок сузір'я  $(\pm A, \pm A)$ . При відсутності шуму зв'язок між синфазною та квадратурною складовими сигналу  $x'(kT_s)$ ,  $y'(kT_s)$  та переданим символом даних  $a_0(k)$ ,  $a_1(k)$  описується (4.13)

$$\begin{bmatrix} x'(kT_s) \\ y'(kT_s) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \cos(\theta - \hat{\theta}(k)) & -\sin(\theta - \hat{\theta}(k)) \\ \sin(\theta - \hat{\theta}(k)) & \cos(\theta - \hat{\theta}(k)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(k) \\ a_1(k) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Припустимо, що на даний момент, детектор фазових помилок знає символи даних. Фазова помилка знаходиться з точки  $x'(kT_s)$ ,  $y'(kT_s)$  шляхом обчислення залишкової різниці фаз між  $x'(kT_s)$ ,  $y'(kT_s)$  і переданою точкою сузір'я  $a_0(k)$ ,  $a_1(k)$ .

Обчислення фазової похибки легко зрозуміти в геометричному представленні. Розглянемо сценарій, наведений на рисунку 4.3.

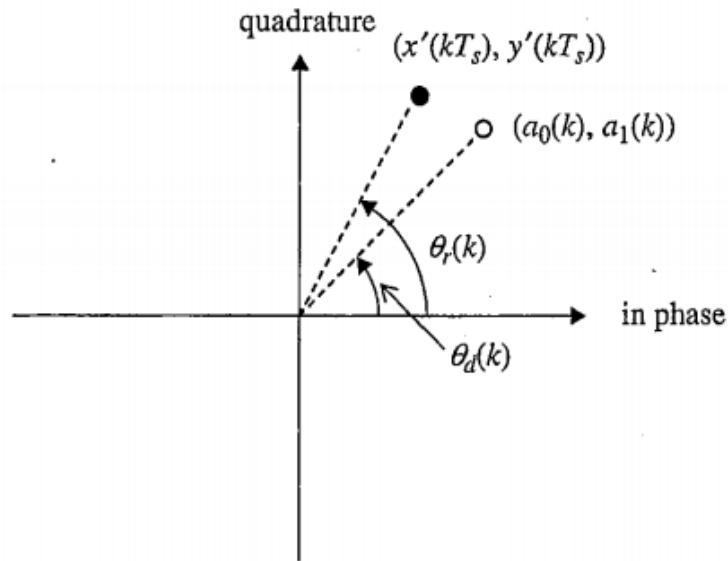


Рисунок 4.3 — Геометричне представлення розрахунку фазової помилки для QPSK

Кут, на який повернута фаза на виході УФ дорівнює (4.14)

$$\theta_r(k) = \tan^{-1} \left\{ \frac{y'(kT_s)}{x'(kT_s)} \right\} \quad (4.14)$$

Та кут на який повернута фаза точки сузір'я (4.15)

$$\theta_d(k) = \tan^{-1} \left\{ \frac{a_1(k)}{a_0(k)} \right\} \quad (4.15)$$

Вихід детектора фазової помилки для  $k$ -го символу таким чином (4.16)

$$e(k) = \theta_r(k) - \theta_d(k) = \tan^{-1} \left\{ \frac{y'(kT_s)}{x'(kT_s)} \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{a_1(k)}{a_0(k)} \right\} \quad (4.16)$$

Сигнал помилки (4.16) вимагає знання переданих символів. Коли фактичні передані символи даних невідомі (або послідовність тренувань пройшла, або не була надана послідовність тренувань), можна використовувати синхронізатор фази несучої, керований рішенням.

Цифровий синтезатор частот, який спрямований на прийняття рішення, використовує дані рішення обчислення фазової помилки. Фазова помилка знаходиться з точки  $x'(kT_s)$ ,  $y'(kT_s)$  шляхом обчислення різниці фаз між  $x'(kT_s)$ ,  $y'(kT_s)$  та найближчою точкою сузір'я  $\hat{a}_0(k)$ ,  $\hat{a}_1(k)$ . Таким чином, фазовий синхронізатор, керований рішенням, замінює  $a_0(k)$  та  $a_1(k)$  у (4.16) на рішення  $\hat{a}_0(k)$  та  $\hat{a}_1(k)$  (4.17):

$$e(k) = \tan^{-1} \left\{ \frac{y'(kT_s)}{x'(kT_s)} \right\} - \tan^{-1} \left\{ \frac{\hat{a}_1(k)}{\hat{a}_0(k)} \right\} \quad (4.17)$$

Щодо QPSK, рішення приймаються як (4.18)

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(k) &= A \cdot \text{sgn} \{ x'(kT_s) \} \\ \hat{a}_1(k) &= A \cdot \text{sgn} \{ y'(kT_s) \} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Цей підхід проілюстровано на малюнку 4.4.

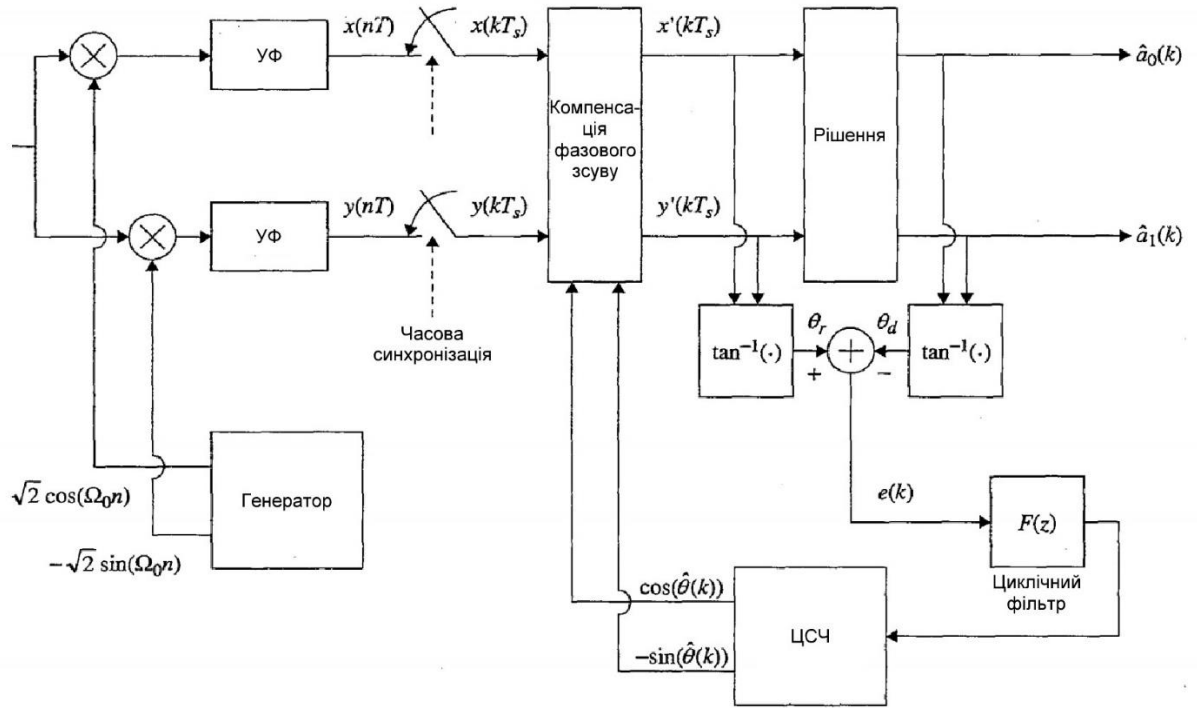


Рисунок 4.4 — Структурна схема ФАПЧ несучої QPSK з використанням сигналу помилки на основі (4.17)

### 4.3 Детектор помилок фази максимальної ймовірності

Евристичні детектори фазових помилок (4.16) та (4.17) базувались на геометричній інтерпретації ефектів некомпенсованого зміщення фази несучої. Незважаючи на те, що фазовий детектор є лінійним (хороша властивість), він вимагає двох операцій з арктангенсом з чотирьох квадрантів (погана властивість). Детектор фазової помилки з максимальною вірогідністю (ML) вибирає оцінку фази  $\hat{\theta}$ , яка мінімізує енергію фазової помилки  $\theta_e = \theta - \hat{\theta}$ .

Будь-який альтернативний вивід детектора фазової помилки ML починається з Евристичних детекторів фазової помилки (4.16) та (4.17) і використовує синус фазової помилки, а не фактичну фазову помилку [5]. Взявши синус (4.16) та застосувавши тотожність  $\sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$  отримаємо (4.17) (4.18)

$$\sin(\theta_r(k) - \theta_d(k)) = \sin(\theta_r(k))\cos(\theta_d(k)) - \cos(\theta_r(k))\sin(\theta_d(k)) \quad (4.17)$$

$$\sin(\theta_r(k) - \theta_d(k)) = \frac{y'(kT_s)a_0(k) - x'(kT_s)a_1(k)}{\sqrt{x'^2(kT_s) + y'^2(kT_s)}\sqrt{a_0^2(k) + a_1^2(k)}} \quad (4.18)$$



Щоб уникнути ділення, запропонованого в (4.18), в якості сигналу помилки можна використовувати тільки чисельник, а члени знаменника поглинаються коефіцієнтом підсилення фазового детектора  $K_p$ . Таким чином, фазова помилка ML є (4.19)

$$e(k) = y'(kT_s)a_0(k) - x'(kT_s)a_1(k) \quad (4.19)$$

Версія прийняття рішення на основі ML детектора фазової помилки отримується заміною  $a_0(k)$  та  $a_1(k)$  в формулі (4.19) на  $\hat{a}_0(k)$  та  $\hat{a}_1(k)$  та отримаємо вираз (4.20)

$$e(k) = y'(kT_s)\hat{a}_0(k) - x'(kT_s)\hat{a}_1(k) \quad (4.20)$$

Щодо QPSK, рішення приймаються як (4.21)

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(k) &= A \cdot \text{sgn}\{x'(kT_s)\} \\ \hat{a}_1(k) &= A \cdot \text{sgn}\{y'(kT_s)\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Структурна схема ФАПЧ носійної QPSK з використанням ML детектора фазової помилки (4.20) показана на малюнку 4.5.

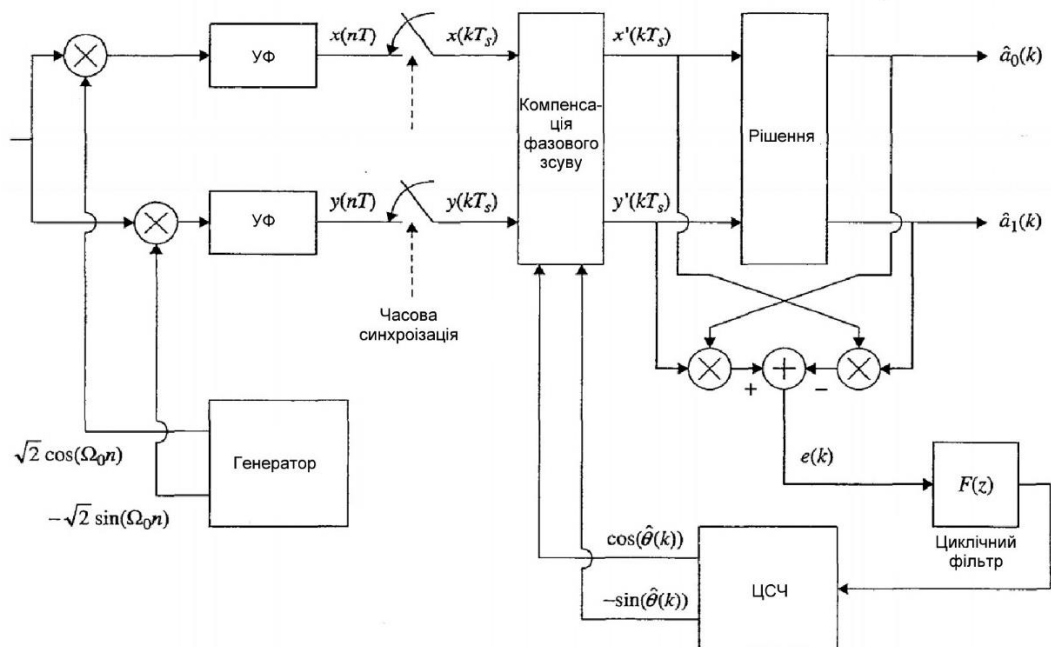


Рисунок 4.5 — Структурна схема ФАПЧ носійної QPSK з використанням сигналу помилки на основі (4.20)

## 5 ЧАСОВА СИНХРОНІЗАЦІЯ СИМВОЛІВ

Часова синхронізація символів – процес оцінки тактового сигналу, який однаковий по фазі та частоті з тактовим сигналом для генерації даних в передавачі. Оскільки виділяти спектр для передачі окремого синхросигналу від передавача до приймача, з ціллю часової синхронізації, неефективно, цей сигнал має бути вилучений з шумних сигналів, які несуть інформацію. Для детекторів тактовий сигнал використовується для визначення моментів, коли необхідно виконати вибірку вихідного сигналу УФ.

Вплив похибки синхронізації для QPSK показано на рисунку 5.1. Оптимальний момент вибірки для виходів синфазного та квадратурного УФ відповідає центру око-діаграми. Помилка синхронізації може бути розглянута як вибірка око-діаграми в момент, який не відповідає максимальному розкриттю ока в центрі око-діаграми. Ефект цієї помилки показаний сузір'ям. Ці сузір'я відповідають значенням око-діаграми в показані моменту часу. Не дивлячись на те, що використовується ідеальна фазова синхронізація і не додається шум, сигнали, формуючі сузір'я, розсіюються; багато з них ближче до границь своїх рішень. Чим більша помилка синхронізації, тим сильніше ефект [6].

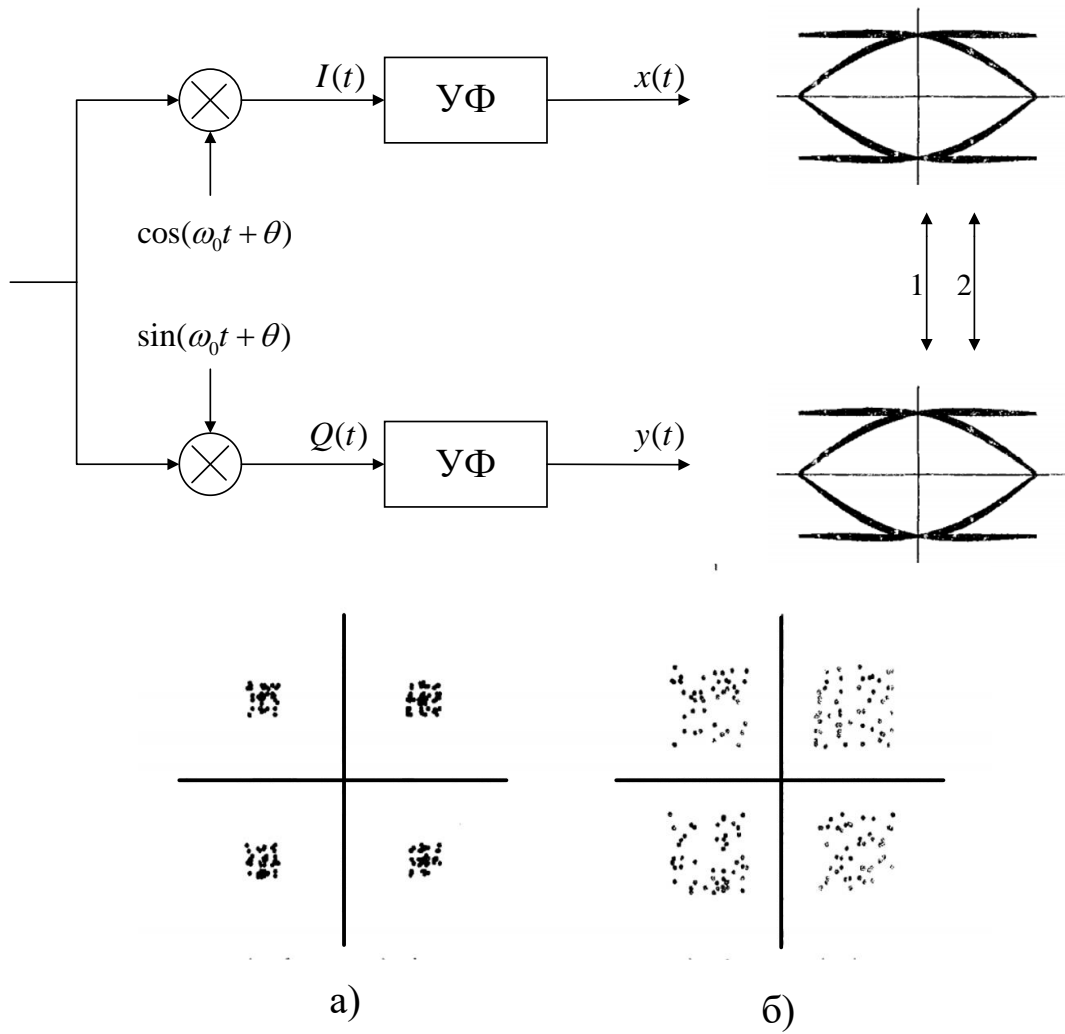


Рисунок 5.1 — Вплив помилки синхронізації на QPSK

У випадку коли УФ реалізований як фільтр з дискретним часом, потрібен АЦП, який встановлений перед УФ. АЦП видає  $T$  відліків (5.1) з інтервалом  $N$  відліків/символ,  $N$ -й зразок цього сигналу може бути представлений як (5.2)

$$r(t) = G_a \sum_k a(k) p(t - kT_s - \tau) + w(t) \quad (5.1)$$

$$r(nT) = G_a \sum_m a(m) p(nT - mT_s - \tau) + w(nT) \quad (5.2)$$

Передбачається, що символи даних не корельовані: (5.3)

$$E\{a(k)a(m)\} = E_{avg} \delta(m - k) \quad (5.3)$$

де  $E_{avg}$  – середня енергія символу. Прийнятий сигнал оброблюється УФ з дискретним часом, імпульсна характеристика якого складається з відліків форми огинаючої сигналу в часі. Вихід УФ (5.4)

$$x(nT) = \frac{G_a}{T} \sum_m a(m) r_p(nT - mT_s - \tau) + v(nT) \quad (5.4)$$

$$r_p(u) = \int_{-L_p T_s}^{L_s T_s} p(t) p(t - u) dt \quad (5.5)$$

Де  $r_p(u)$  - автокореляційна функція форми імпульсу, задана формулою (5.5) та  $v(nT) = p(-nT) * w(nT)$  - складова вихідного сигналу УФ із-за шуму.

Ціллю часової синхронізації символів є створення  $N$  вибірок на виході УФ протягом кожного інтервалу символу, щоб одна з них була вирівняна з максимальним значенням відкриття ока.

Підхід, проілюстрований на рисунку 5.2, вирішує ці проблеми шляхом дискретизації прийнятого сигналу  $r(t)$  з фіксованою швидкістю  $\frac{1}{T}$ , яка асинхронна зі швидкістю передачі символів  $\frac{1}{T_s}$ . Часова затримка  $\tau$  оцінюється виключно з відліків  $x(nT)$ , асинхронних відліків на виході УФ. Цей підхід створює вибірки, які не вирівняні з границями символів, як показано око-діаграмою на виході УФ. Роль часової синхронізації символів заключається в «переміщенні» вибірок в бажані моменти часу. Інша назва «рухомих в часі» зразків – інтерполяція. Оскільки синхронізатор часу повинен адаптуватися до невідомої часової затримки, інтерполятор має бути адаптивним. При правильній роботі інтерполятор видає узгоджені вихідні сигнали фільтра, які вирівняні з границями символу і оптимальними моментами вибірки, як показано на око-діаграмі на виході інтерполятора, рисунку 5.2 [5].

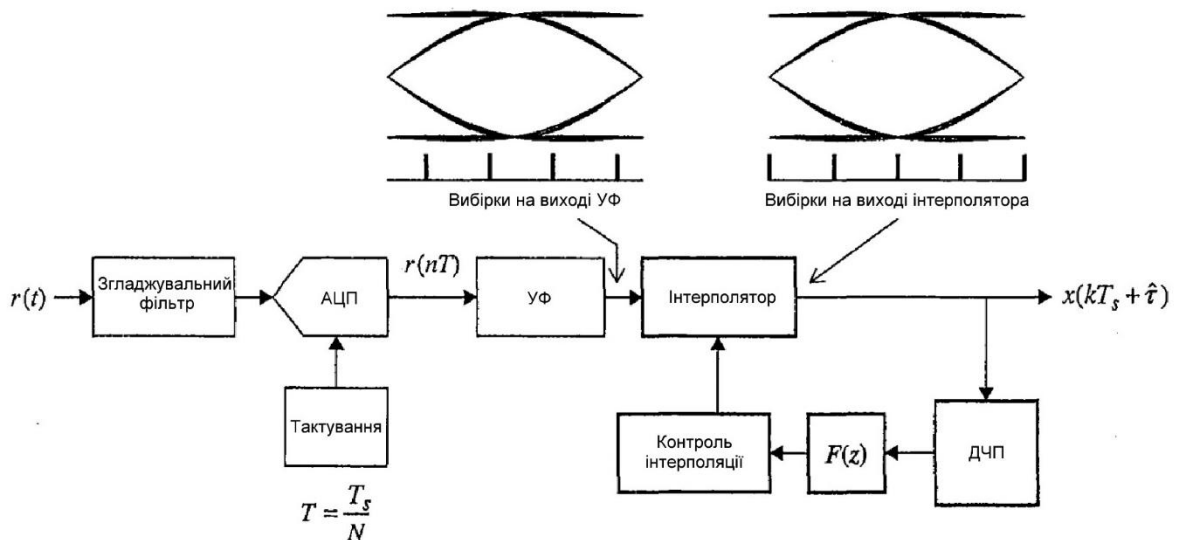


Рисунок 5.2 — Часова синхронізація символів для детектора дискретних даних

Основним недоліком цього підходу є *тремтіння інтерполяції*, яке виникає, коли  $T_i \neq NT$ . В цьому випадку інтерполянт виводиться в середньому кожні  $N$  вибірок. Але з-за умови  $T_i \neq NT$  дрібна помилка синхронізації накопичується і в кінцевому результаті дорівнює одиниці. Коли це відбувається інтерполянт виводить  $N-1$  відліків, або  $N+1$  після попередніх відліків інтерполянта, щоб компенсувати різницю. Це тремтіння особливо проблематично, якщо біти даних повинні повторно передаватися по синхронному каналу в будь яке інше місце призначення.

Підхід з асинхронною вибіркою показаний на рис. 5.2, є більш розповсюдженим підходом. Часто часова синхронізація виконується з використанням дискретної системи ФАПЧ, яка складається з трьох основних модулів: TED, loop фільтра і керування інтерполяцією. Детектор помилок синхронізації описаний в розділі 5.1, інтерполяція в розділі 5.2 і керування інтерполяцією в розділі 5.3

### 5.1 Детектор часових помилок

Загалом, детектори часових помилок (TED - timing error detector) генерують сигнал помилки один раз на кожен символ на основі поточної оцінки синхронізації і з використанням входу узгодженого фільтра,  $r(nT)$ , і вихід-

ного сигналу узгодженого фільтра  $x(nT)$ . Іншими словами, дискретний сигнал помилки оновлюється зі швидкістю передачі символів. Припустимо, що доступний ідеальний інтерполятор, який обчислює інтерполянт  $x(kT_s + \hat{\tau})$  з використанням оцінки тимчасової затримки  $\hat{\tau}$  і вихідних сигналів узгодженого фільтра. Інтерполянт може бути виражений як (8.24) (8.25)(5.6)(5.7)

$$x(kT_s + \hat{\tau}) = K \sum_m a(m) r_p((k-m)T_s + \hat{\tau} - \tau) + v(kT_s + \hat{\tau}) \quad (5.6)$$

$$x(kT_s + \hat{\tau}) = K \sum_m a(m) r_p((k-m)T_s - \tau_e) + v(kT_s + \hat{\tau}) \quad (5.7)$$

де  $\tau_e = \tau - \hat{\tau}$  - помилка синхронізації, а  $K = \frac{G_a}{T}$ . TED формує сигнал, який є функцією помилки синхронізації  $\tau_e$ , так само, як фазовий детектор в системі ФАПЧ несучої генерує сигнал, який є функцією фазової помилки. Вихідний сигнал TED,  $e(kT_s)$ , є функцією інтерпольованих вихідних сигналів узгодженого фільтра і символів даних (або їх оцінок).

### ***5.1.1 Детектор часових помилок переходу через нуль (Zero-Crossing Timing Error Detector)***

Детектор часової помилки переходу через нуль (ZCTED) заснований на виявленні перетинів нуля на око-діаграмі. Він працює з 2 вибірками на символ і забезпечує нульову помилку, коли кожна друга вибірка вирівняна за часом з перетином нуля на виході узгодженого фільтра [5]. (Решта вибірок вирівняні за часом з оптимальними моментами вибірки що відповідають максимальному середньому розкриттю ока.) Для зручності припустимо, що вихідні дані узгодженого фільтра доступні зі швидкістю дві вибірки на символ і індексуються  $k$ (5.8):

$$\dots, x((k-1)T_s - \tau), x((k - \frac{1}{2})T_s - \tau), x((k + \frac{1}{2})T_s - \tau), x((k+1)T_s - \tau), \dots \quad (5.8)$$

Сигнал про помилку синхронізації становить (5.9), для випадку часової синхронізації символів за допомогою даних

$$e(k) = x((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau})[a(k-1) - a(k)] \quad (5.9)$$

та (5.10) для керованої рішенням, часової синхронізації символу

$$e(k) = x((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau})[a(k-1) - \hat{a}(k)] \quad (5.10)$$

Графічне представлення ZCTED показано на рисунку 5.3. Знак помилки визначається різницею  $a(k-1) - a(k)$  або  $\hat{a}(k-1) - \hat{a}(k)$  рис 5.3(a) ілюструє випадок, коли помилка синхронізації  $\tau_e$  позитивна, а перехід з позитивного в негативний. Часова помилка дорівнює (5.11)

$$e(k) = x((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau})[a(k-1) - a(k)] = 2Ax((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau}) > 0 \quad (5.11)$$

та забезпечує сигнал помилки з правильним знаком. На рис 5.3(b) помилка  $\tau_e$  синхронізації негативна.

Сигнал помилки дорівнює (5.12)

$$e(k) = x((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau})[a(k-1) - a(k)] = 2Ax((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau}) < 0 \quad (5.12)$$

та забезпечує сигнал помилки з правильним знаком. Коли перехід даних відбувається з негативного в позитивний, вираз  $x((k - \frac{1}{2})T_s + \hat{\tau})$  хибний, коректним буде  $a(k-1) - a(k) = -2A$ . Звернемо увагу, що при відсутності передачі даних  $a(k-1) - a(k) = 0$  і інформація про помилку не надається.

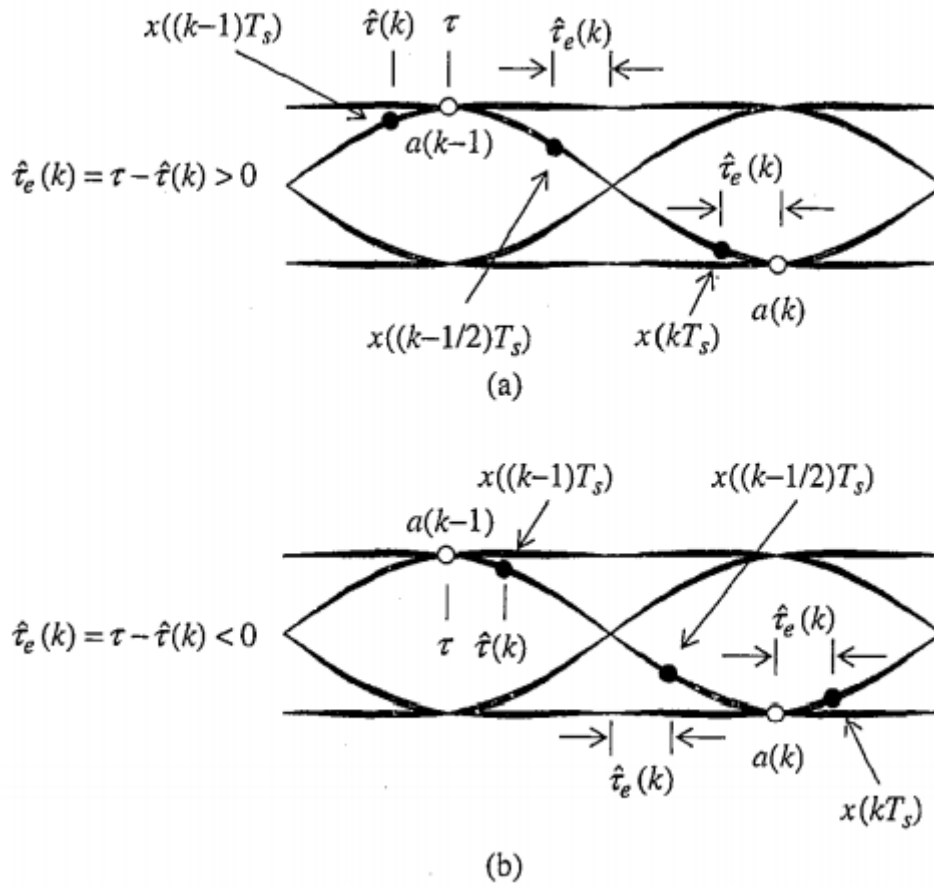


Рисунок 5.3 — Приклад роботи детектора. а) перехід з позитивного в негативний, б) перехід з негативного в позитивний

Для двійкового РАМ рішення щодо символів є (5.13)

$$\begin{aligned}\hat{a}(k-1) &= A \cdot \text{sgn} \{x((k-1)T_s + \hat{\tau})\} \\ \hat{a}(k) &= A \cdot \text{sgn} \{x(kT_s + \hat{\tau})\}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Як і раніше, альтернативою є використання (5.14)

$$\begin{aligned}\hat{a}(k-1) &= \text{sgn} \{x((k-1)T_s + \hat{\tau})\} \\ \hat{a}(k) &= \text{sgn} \{x(kT_s + \hat{\tau})\}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Як для двійкового так, так і для недвійкового РАМ. Апроксимація (5.14) дає правильний знак оцінки помилки синхронізації, але не правильної амплітуди.

## 5.2 Інтерполяція

Загальновживані терміни для опису інтерполяції ілюструються діаграмою на рисунку 5.4. Семпли з  $T$ -інтервалом сигналу неперервного в часі з обмеженою смугою, що доступні та позначені (5.15)



$$\dots, x((n-1)T), x(nT), x((n+1)T), x((n+2)T), \dots \quad (5.15)$$

Потрібний семпл – це семпл  $x(t)$  при  $t = kT_I$  називається  $k$ -м інтерполянтом. Процес, що використовується для розрахунку  $x(kT_I)$  з доступних семплів, називається інтерполяцією. Коли  $k$ -й інтерполянт знаходиться між семплами  $x(nT)$  та  $x((n+1)T)$ , індекс семпла  $n$  називається індексом  $k$ -ї базової точки і позначається  $m(k)$ . Момент часу  $kT_I$  складає деяку долю часу семпла, перевищуючу  $m(k)$ . Цей дріб називається  $k$ -м дробним інтервалом та позначається  $\mu(k)$ .  $k$ -й дробний інтервал задовольняє умову  $0 \leq \mu(k) < 1$  і визначається як  $\mu(k)T = kT_I - m(k)T$ .

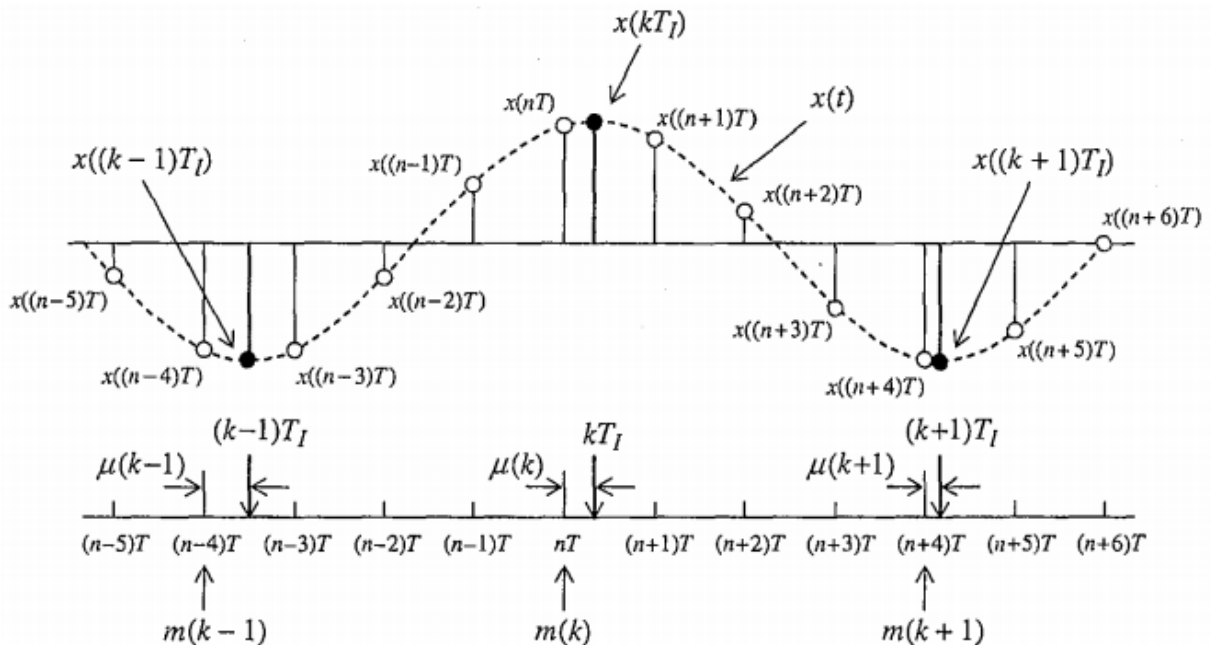


Рисунок 5.4 — Ілюстрація взаємозв'язку між інтервалом інтерполяції  $T_I$ , часом вибірки  $T$ , індексами базових точок та дробовими інтервалами

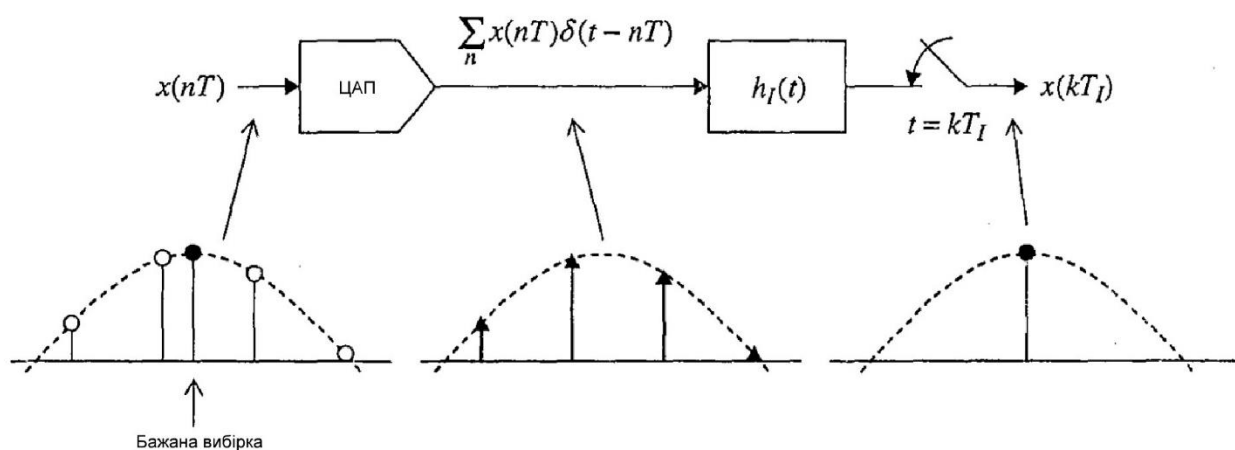


Рисунок 5.5 — Уявна система, що використовує безперервну обробку для виконання інтерполяції.

Основне рівняння інтерполяції можна отримати, розглянувши уявну систему, що включає безперервну обробку, проілюстровану на малюнку 5.5. Семпли  $x(nT), (n = 0, 1, \dots)$  перетворюються у зважену послідовність імпульсів (5.16)

$$x_a(t) = \sum_n x(nT)\delta(t - nT) \quad (5.16)$$

За допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) [5]. Послідовність імпульсів фільтрується інтерполяційним фільтром з імпульсною характеристикою  $h_I(t)$  для отримання вихідного сигналу  $x(t)$  неперервного в часі. Цей сигнал може бути виражений як (5.17)

$$x(t) = \sum x(nT)h_I(t - nT) \quad (5.17)$$

Для отримання бажаних інтерполянтів,  $x(t)$  повторно дискретизується через проміжки  $kT_I$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).  $k$ -й інтерполянт (5.17) оцінюється при  $t = kT_I$  та може бути виражений як (5.18)

$$x(kT_I) = \sum_n x(nT)h_I(kT_I - nT) \quad (5.18)$$

Символ  $n$  індексує відліки сигналу. Сума згортки (5.18) може бути повторно виражена з використанням індекса фільтра  $i$ . Використовуючу  $m(k) = \left\lfloor \frac{kT_I}{T} \right\rfloor$

та  $\mu(k) = \frac{kT_I}{T} - m(k)$ , індекс фільтру  $i = m(k) - n$ . Використовуючи індекс фільтру, вираз (5.18) може бути виражений як (5.19)

$$x(kT_I) = \sum_i x((m(k) - i)T) h_i((i + \mu(k))T) \quad (5.19)$$

Рівняння (5.19) буде служити основним рівнянням для інтерполяції і показує, що бажаний інтерполянт можна отримати, обчислюючи зважену суму доступних семплів. Оптимальний інтерполяційний фільтр - це ідеальний фільтр низьких частот, імпульсна характеристика якого є (5.20)

$$h_I = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \quad (5.20)$$

З урахуванням дробового інтервалу  $\mu$ , ідеальна імпульсна характеристика відбирається при  $t = iT - \mu T$ , для отримання коефіцієнтів фільтру, необхідних (5.19).

Роль блоку управління інтерполяцією на малюнку 5.2 полягає в тому, щоб надати інтерполятору індекс базової точки і дробовий інтервал для кожного необхідного інтерполянта. Для асинхронної вибірки тактова частота дискретизації не залежить від тактової частоти що використовується передавачем. Як наслідок, моменти вибірки не синхронізуються з періодами символу. Частота дискретизації і символна швидкість несумірні, і час дискретизації ніколи не збігається в точності з бажаним часом інтерполяції.

Ідеальний інтерполяційний фільтр – ІІР фільтр. Таким чином, його використання створює неприйнятне обчислювальне навантаження, особливо при зміні дробного інтервалу. Тому в цифровому зв'язку частіше використовуються FIR фільтри, які наближені до ідеального

### **5.2.1 Кусково-поліноміальна інтерполяція.**

Неперервна форма сигналу  $x(t)$  яка лежить в основі, апроксимується поліномом  $t$  вигляду (5.20).

$$x(t) \approx c_p t^p + c_{p-1} t^{p-1} + \dots + c_1 t + c_0 \quad (5.20)$$

Коефіцієнти поліному визначаються значеннями вибірки  $p+1$  к тільки значення коефіцієнтів відомі, інтерполянти при  $t = kT_I = (m(k) + \mu(k))T$  отримуємо (5.21)

$$x(kT_I) \approx c_p (kT_I)^p + c_{p-1} (kT_I)^{p-1} + \dots + c_1 (kT_I) + c_0 \quad (5.21)$$

Цікавими є три випадки, коли  $p = 1, 2, 3$ , які показані на рисунку (222). При  $p = 1$  многочлен першого порядку (5.22)

$$x(t) \approx c_1 t + c_0 \quad (5.22)$$

Що використовується для апроксимації. Потрібні компоненти розраховуються з (5.23)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = c_1 ((m(k) + \mu(k))T) + c_0 \quad (5.23)$$

Коефіцієнти  $c_1$  та  $c_0$  визначаються доступними виборками та задовольняють вираз (5.24)

$$\begin{bmatrix} x(m(k)T) \\ x((m(k) + 1)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(k)T & 1 \\ (m(k) + 1)T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Вирішивши (5.24) для  $c_1$  та  $c_0$  і підставивши в (5.23) отримаємо (5.25)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = \mu(k)x((m(k) + 1)T) + (1 - \mu(k))x(m(k)T) \quad (5.25)$$

який є звичним лінійним інтерполятором.

Важливі чотири спостереження. По-перше, інтерполянт являє собою лінійну комбінацію доступних вибірок. Як наслідок, інтерполянт можна розглядати як результат фільтра з коефіцієнтами, запропонованими (5.25): отримаємо результат (5.26)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = \sum_{i=-1} h_1(i)x((m(k) - i)T) \quad (5.26)$$

де  $h_1(-1) = \mu(k)$ ;  $h_1(0) = 1 - \mu(k)$ .

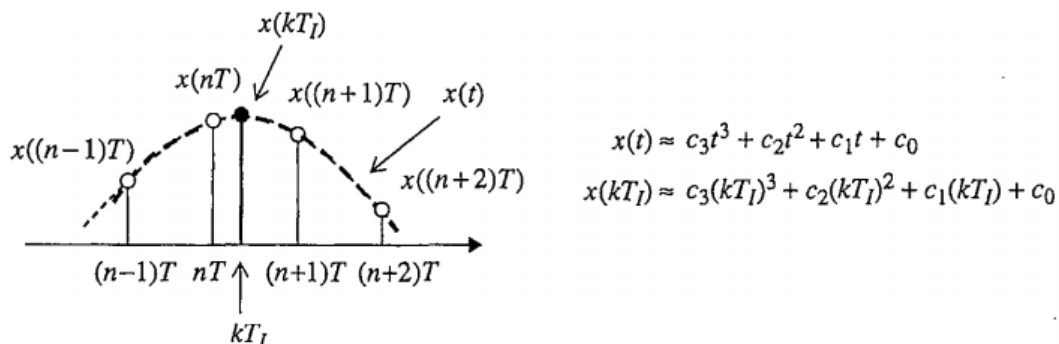
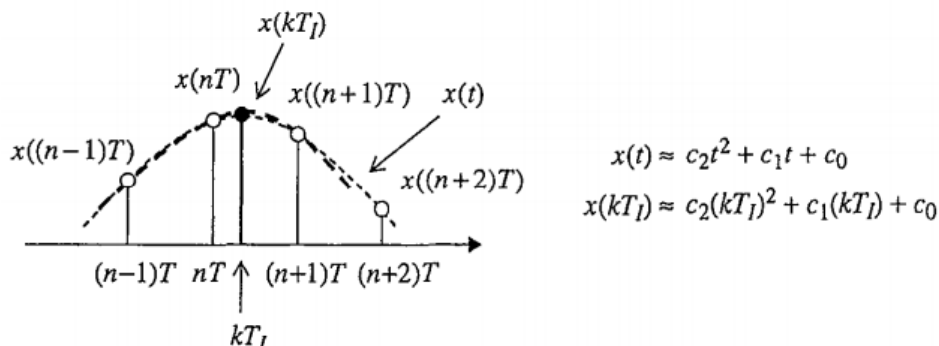
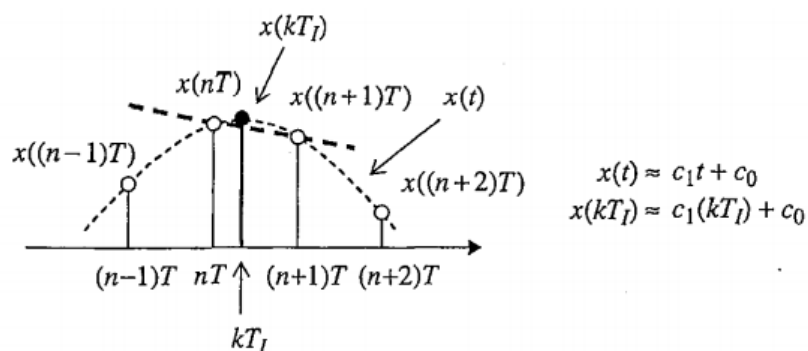


Рисунок 5.6 — Три часткових випадки поліноміальної інтерполяції: (вверху) лінійна інтерполяція, (в центрі) квадратична інтерполяція та (внизу) кубічна інтерполяція

Друге важливе спостереження полягає в тому, що еквівалентні коефіцієнти фільтра є функцією тільки дробного інтервалу, а не функцією індексу базової точки. Індекс базової точки визначає, який набір вибірок слід використовувати для обчислення інтерполянта. Третє спостереження полягає в тому, що інтерполюючий фільтр являє собою КІХ-фільтр з лінійною фазою, що є надзвичайно важливою властивістю для цифрового зв'язку. Щоб побачити, що цей фільтр має лінійну фазу, звернемо увагу, що коефіцієнти симетричні відносно центральної точки фільтра, яка визначається як  $\mu(k) = \frac{1}{2}$ . Іншими

словами,  $h((m + \frac{1}{2})T) = h((-m + \frac{1}{2})T)$  для  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Це результат використання парного числа вибірок для обчислення інтерполянта, який знаходиться між двома середніми. Останнє спостереження полягає в тому, що сума коефіцієнтів дорівнює одиниці і, отже, не залежить від  $\mu(k)$ .

Як наслідок, інтерполюючий фільтр не змінює амплітуду, що лежить в основі безперервної форми хвилі, в процесі отримання інтерполянта. Друге спостереження є привабливою особливістю, оскільки будь-який обчислювальний пристрій кінцевої точності в кінцевому підсумку переповниться при збільшенні  $\mu(k)$ . Третя властивість вимагає використання інтерполятором парного числа вибірок. Парне число вибірок необхідно для визначення апроксимуючого полінома непарного степеня. З цієї причини популярні апроксимуючі многочлени непарного степеня. Наступним по старшинству многочленом непарного степеня буде  $p = 3$ . У цьому випадку многочлен дорівнює (5.27)

$$x(t) \approx c_3 t^3 + c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad (5.27)$$

та використовується для апроксимації основної форми хвилі безперервної в часі. Бажані інтерполянти отримуються з (5.28)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = c_3 ((m(k) + \mu(k))T)^3 + c_2 ((m(k) + \mu(k))T)^2 + c_1 ((m(k) + \mu(k))T) + c_0 \quad (5.28)$$

Коефіцієнти  $c_3$ ,  $c_2$ ,  $c_1$  та  $c_0$  визначаються як (5.29)

$$\begin{bmatrix} x((m(k) - 1)T) \\ x(m(k)T) \\ x((m(k) + 1)T) \\ x((m(k) + 2)T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((m(k) - 1)T)^3 & ((m(k) - 1)T)^2 & (m(k) - 1)T & 1 \\ (m(k)T)^3 & (m(k)T)^2 & m(k)T & 1 \\ ((m(k) + 1)T)^3 & ((m(k) + 1)T)^2 & (m(k) + 1)T & 1 \\ ((m(k) + 2)T)^3 & ((m(k) + 2)T)^2 & (m(k) + 2)T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Вирішивши (5.29) для  $c_3$ ,  $c_2$ ,  $c_1$  та  $c_0$  і підставивши в (5.28) отримаємо (5.30)

$$\begin{aligned}
x((m(k) + \mu(k))T) = & \left( \frac{\mu(k)^3}{6} - \frac{\mu(k)}{6} \right) x((m(k) + 2)T) - \\
& - \left( \frac{\mu(k)^3}{2} - \frac{\mu(k)^2}{2} - \mu(k) \right) x((m(k) + 1)T) + \\
& + \left( \frac{\mu(k)^3}{2} - \mu(k)^2 - \frac{\mu(k)}{2} + 1 \right) x(m(k)T) - \\
& - \left( \frac{\mu(k)^3}{6} - \frac{\mu(k)^2}{2} + \frac{\mu(k)}{3} \right) x((m(k) - 1)T)
\end{aligned} \tag{5.30}$$

який називається кубічним інтерполятором. При інтерпретації як фільтр вихід кубічного інтерполятора має форму (5.31)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = \sum_{i=-2}^1 h_3(i) x((m(k) - i)T) \tag{5.31}$$

де коефіцієнти фільтра (5.32)

$$\begin{aligned}
h_3(-2) &= \frac{\mu(k)^3}{6} - \frac{\mu(k)}{6} \\
h_3(-1) &= -\frac{\mu(k)^3}{2} + \frac{\mu(k)^2}{2} + \mu(k) \\
h_3(0) &= \frac{\mu(k)^3}{2} - \mu(k)^2 - \frac{\mu(k)}{2} + 1 \\
h_3(1) &= -\frac{\mu(k)^3}{6} + \frac{\mu(k)^2}{2} - \frac{\mu(k)}{3}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Нарешті, для випадку  $p = 2$ , використовуючи наближення (5.33)

$$x(t) \approx c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \tag{5.33}$$

для апроксимації основної форми хвилі безперервної в часі (5.34)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = c_2 ((m(k) + \mu(k))T)^2 + c_1 ((m(k) + \mu(k))T) + c_0 \tag{5.34}$$

для вичислення бажаного інтерполянта вимагається використання трьох відліків. Оскільки кількість вибірок не парна, бажаний інтерполянт не знаходиться між двома середніми тому результуючий фільтр не буде симетричним

відносно  $\mu(k) = \frac{1}{2}$ . Якщо використовувати чотири точки з'явиться складка.

Бажаний інтерполянт можна розглянути як результат фільтра вигляду (5.35)

$$x((m(k) + \mu(k))T) = \sum_{i=-2}^1 h_2(i)x((m(k) - i)T) \quad (5.35)$$

де коефіцієнти фільтра (5.36)

$$\begin{aligned} h_2(-2) &= \alpha\mu(k)^2 - \alpha\mu(k) \\ h_2(-1) &= -\alpha\mu(k)^2 + (1 + \alpha)\mu(k) \\ h_2(0) &= -\alpha\mu(k)^2 - (1 - \alpha)\mu(k) + 1 \\ h_2(1) &= \alpha\mu(k)^2 - \alpha\mu(k) \end{aligned} \quad (5.36)$$

### 5.3 Інтерполяційний контроль

Призначення блоку управління інтерполятором на малюнку 8.4.2 полягає в тому, щоб надати інтерполятору індекс  $k$ -ї базової точки  $m(k)$  і  $k$ -й дробовий інтервал  $\mu(k)$ . Індекс базової точки зазвичай не обчислюється явно, а скоріше ідентифікується сигналом, так званим *стробом*. Найчастіше використовується один із двох методів, це метод на основі лічильника і рекурсивний метод [5] [6].

**Рекурсивний контроль інтерполяції.** Співвідношення для управління рекурсивною інтерполяцією можна отримати, записавши вираз для двох послідовних моментів інтерполяції як (5.37)

$$\begin{aligned} kT_I &= (m(k) + \mu(k))T \\ (k + 1)T_I &= (m(k + 1) + \mu(k + 1))T \end{aligned} \quad (5.37)$$

і віднімання двох, щоб отримати рекурсію (5.38)

$$m(k + 1) = m(k) + \frac{T_I}{T} + \mu(k) - \mu(k + 1) \quad (5.38)$$

Оскільки  $m(k)$  і  $m(k + 1)$  є цілими числами, дробова частина правої частини (5.38) повинна дорівнювати нулю, звідки отримується рекурсія для дробового інтервалу (5.39):



$$\mu(k+1) = \left( \mu(k) + \frac{T_l}{T} \right) \bmod 1 \quad (5.39)$$

Умова  $0 \leq \mu(k+1) < 1$  означає

$$m(k+1) + \mu(k+1) = m(k) + \frac{T_l}{T} + \mu(k) < m(k+2) \quad (5.40)$$

що співвідношення (5.40) повинне виконуватися. Таким чином, рекурсія із збільшенням кількості виборок дорівнює (5.41)

$$m(k+1) - m(k) = \left\lceil \frac{T_l}{T} + \mu(k) \right\rceil \quad (5.41)$$

Приріст кількості вибірки є більш корисною величиною, ніж фактичний індекс базової точки, оскільки будь-який лічильник кінцевої точності, який використовується для обчислення та/або збереження  $m(k)$ , з часом переповнюється. Як і у випадку з контролем на основі лічильника, співвідношення

$\frac{T_l}{T}$ , потрібне для (5.39) та (5.41), оцінюється за  $W(n) = \frac{1}{N} + \nu(n)$ , де  $\nu(n)$  -

вихідний сигнал циклічного фільтра.

## 6 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИЙМАЧА

### 6.1 Опис моделі

Основними недоліками систем з цифровими методами передачі сигналів є значне розширення займаної смуги частот каналів та необхідність забезпечення точної синхронізації сигналів. В даній роботі було промодельовано алгоритми фазової синхронізації носійної, а також часової синхронізації символів. Постановка проблем синхронізації, їх графічне представлення проілюстровано на слайдах 5 та 7 презентації до захисту роботи.

В розділі 4 було розглянуто декілька методів фазової синхронізації носійної. Одним з головних недоліків методу зображеного на рис.4.2 є те, що корекція фази відбувається після УФ. З цього випливає що для вхідного сигналу цей фільтр не є узгодженим. Розглядаючи метод проілюстрований на рис.4.1 існує декілька ситуацій:

1. Сигнал до перенесення на base-band уже цифровий. Тоді даний метод вирішує недолік попереднього, але потрібно використовувати АЦП з високою частотою дискретизації, так як сигнал до оцифровки високочастотний.
2. Сигнал оцифровується після перенесення на base-band, що вирішує проблему з АЦП, але тепер потрібно використати ЦАП для перетворення  $\sqrt{2} \cos(\Omega_0 n + \hat{\theta}(n))$  і  $-\sqrt{2} \sin(\Omega_0 n + \hat{\theta}(n))$  в аналогову форму.

Розглянувши переваги та недоліки даних методів синхронізації, було прийнято рішення об'єднати їх. Оцифровка сигналу відбувається після перенесення в base-band діапазон що вирішує проблему з високорозрядним АЦП, а блок «Компенсація фазового зсуву» встановлено перед УФ що вирішує проблему з узгодженням фільтру та сигналу. Блок схема представлена на рисунку 6.1.

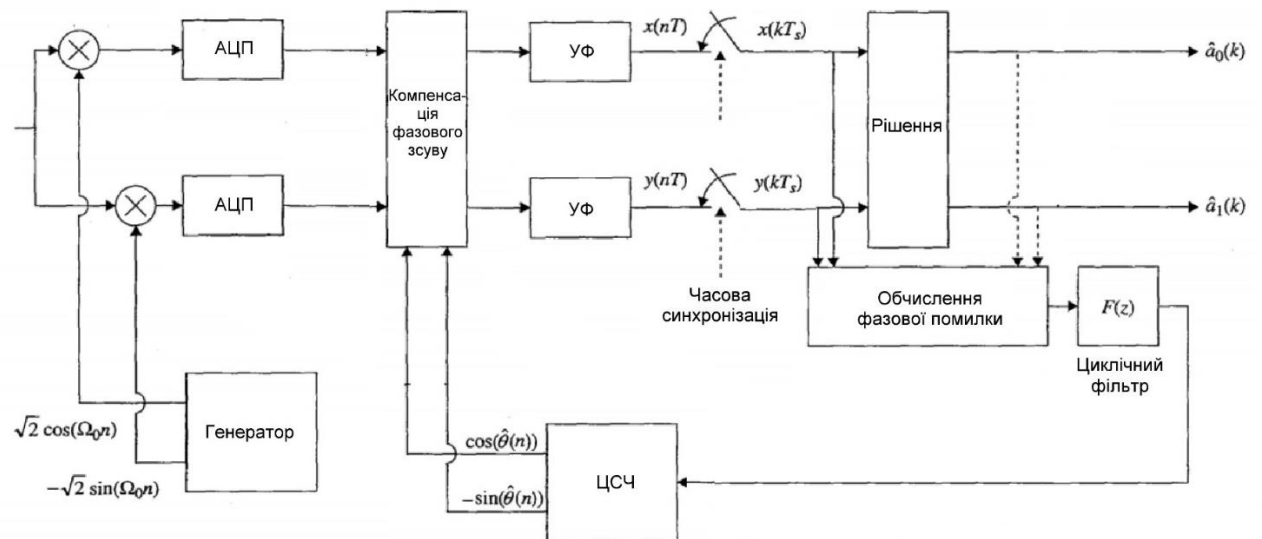


Рисунок 6.1 — Схема фазової синхронізації носійної

Часова символна синхронізація відбувається за методом описаним в розділі 5, що зображений на рис.5.2. Він використовує кусково-поліноміальну інтерполяцію описану в 5.2.1.

Об'єднавши ці модулі в один та реалізувавши кожен з них математично отримали модель цифрового приймача з фазовою та символною синхронізацією. Код що описує модель представлено в додатку А.

## 6.2 Результати моделювання

На вхід приймача подається сигнал з цифровою модуляцією QAM16 з частотною та фазовою розстрокою. Модель проводить фазову та символну синхронізацію. Це дає нам можливість відслідкувати роботу окремих блоків та спостерігати за сигналами в вузлах що нас цікавлять. На рисунку 6.2 зображено параметри та сигнали які відслідковувалися.

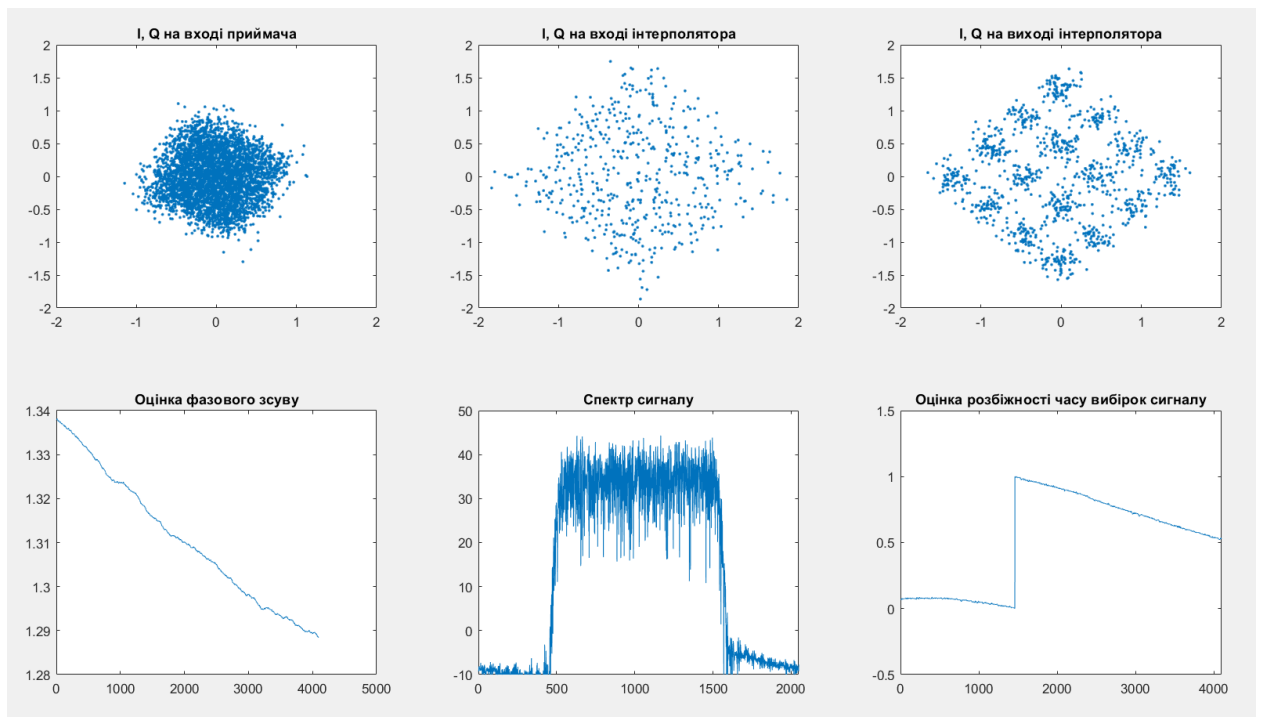


Рисунок 6.2 — Один з кадрів синхронізації

Після чого було досліджено залежність бітової помилки від  $\frac{E_b}{N_0}$ ,

де  $\frac{E_b}{N_0}$  це відношення енергії біта до енергії шуму.

А також залежність бітової помилки від степеня поліному інтерполяції та від частоти дискретизації рисунки 6.3 – 6.5.

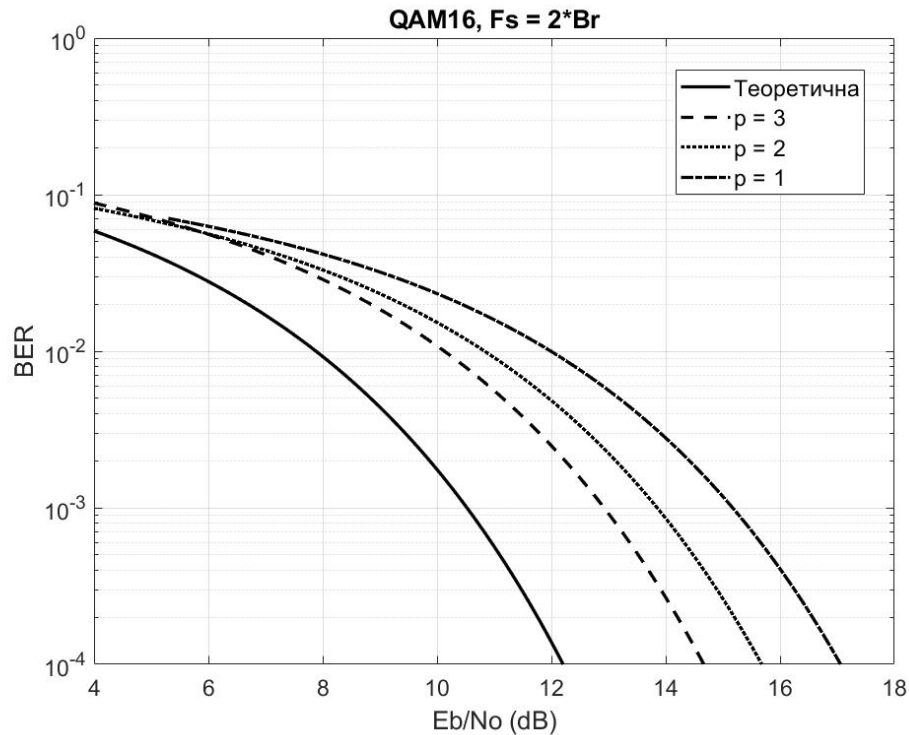


Рисунок 6.3 — Залежність бітової помилки від степеня поліному інтерполяції при  $F_s = 2Br$

З рисунку 6.3 бачимо що найбільш наближеною до ідеальної є характеристика при  $p = 3$ , де  $p$  - степінь поліному, і найгірша ситуація при лінійній інтерполяції. Щоб забезпечити якість прийому з бітовою помилкою  $10^{-4}$ , при кубічній інтерполяції відношення  $\frac{E_b}{N_0} = 14.6$  дБ в той час як для теоретичної 12.2 дБ.

З рисунку 6.4 для забезпечення токої ж якості прийому при кубічній інтерполяції відношення  $\frac{E_b}{N_0} = 13.7$  дБ. Це обумовлено різною частотою дискретизації, залежність від якої показано на рисунку 6.5.

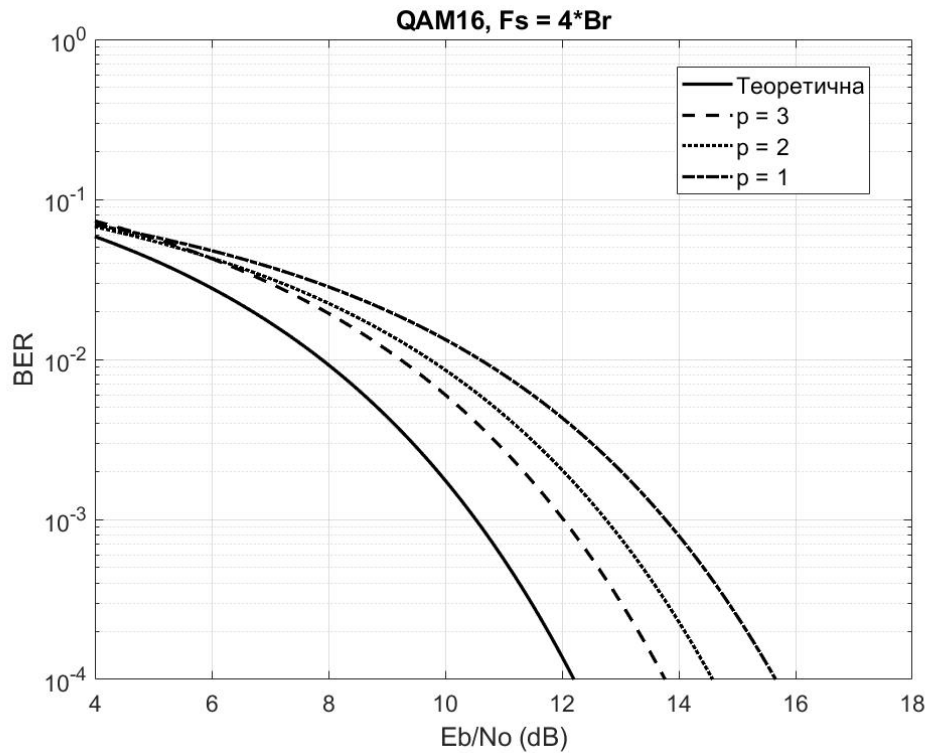


Рисунок 6.4 — Залежність бітової помилки від степеня поліному інтерполяції при  $F_s = 4Br$

Рисунок 6.5 ілюструє як залежить крива BER від частоти дискретизації. При однаковій інтерполяції різниця в відношенні  $\frac{E_b}{N_0}$  для забезпечення якості прийому з помилкою  $10^{-4}$  дорівнює 0.9 дБ.

При збільшенні степеня поліному вище 3, уже не буде дуже серйозних змін, крива BER залишиться поряд з кривою при кубічній інтерполяції, а ресурс затрачений на інтерполяцію буде значно більшим, що не є вигідним. З дискретизацією схожа ситуація, при збільшенні частоти вище 4 разів, не будемо отримувати явний вииграш.

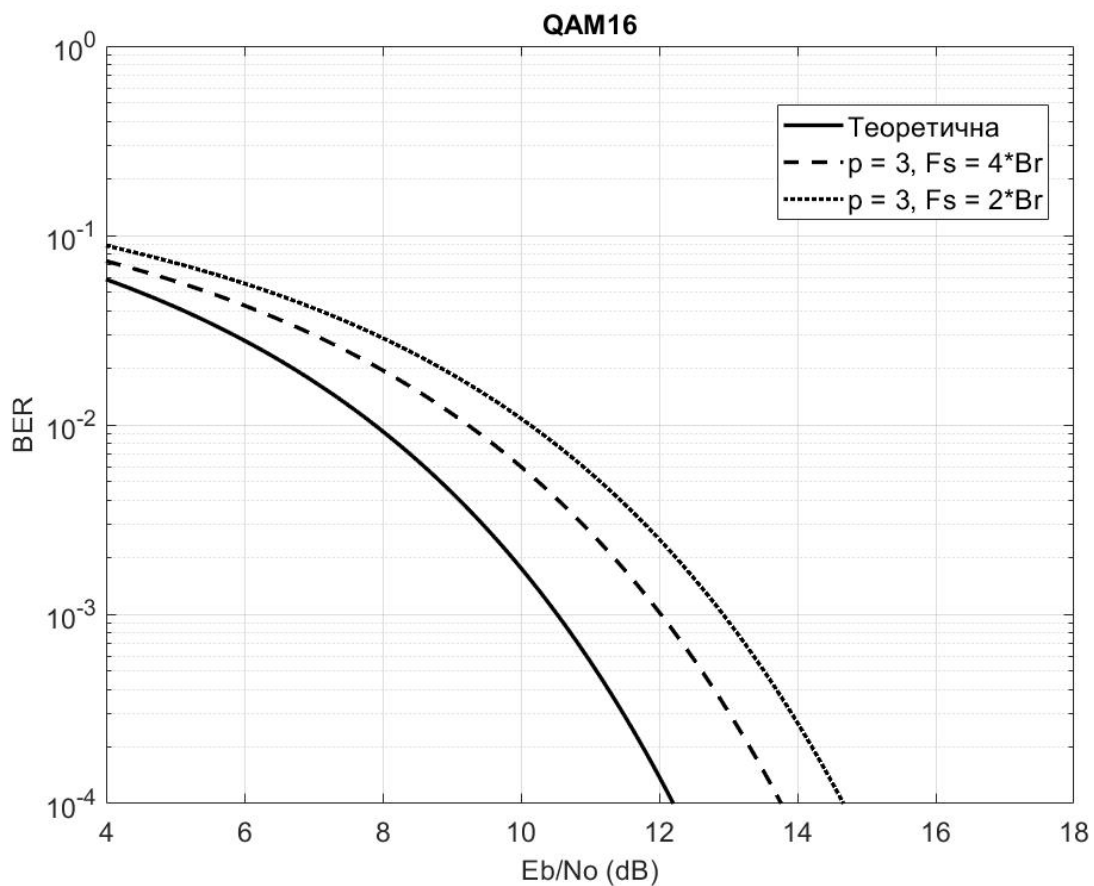


Рисунок 6.5 — Порівняння бітової помилки при різній частоті дискретизації

Звернувши увагу на рисунок 5.1 можна зробити висновок про те чому характеристика кривої BER покращується від підвищення степеня. Чим вище степінь поліному, тим точніше розраховується інтерполянт, і ми робимо вибірки в момент часу коли око-діаграма максимально відкрита.

## ВИСНОВКИ

Розглянувши та порівнявши методи часової та символної синхронізації було обрано найбільш ефективний. В САПР Matlab було описано кожен з блоків та об'єднано в загальну модель приймача з синхронізацією.

Сигнал з часовою розстройкою надходить до входу приймача, детектор фазової помилки оцінює її, та передає інформацію компенсатори який вносить протилежний поворот. А інтерполятор, в свою чергу, проводить символну синхронізацію. З результатів моделювання видно як з цим впорався алгоритм, тобто було стабілізовано обертання площини з проекціями I, Q (частотна та фазова синхронізація), а прийняті біти зібрано максимально близько біля точок сузір'я (символьна синхронізація).

Також було досліджено залежність якості прийому, відображається кривими BER, при різних степенях поліному інтерполяції. При збільшенні степеня поліному якість прийому покращується, це обумовлено тим, що інтерполятор, в правильні моменти часу («око» на око-діаграмі найбільш відкрите) за відомим вибірками обчислює значення інтерполянту. Теоретично, якщо збільшувати степінь до нескінченності значення кривої BER прямуватиме до теоретичного. Але використання таких поліномів дуже ресурсозатратне, тому треба знаходити компроміс.

Дослідивши вплив частоти дискретизації на якість прийому, бачимо що при її збільшенні якість покращується. Обумовлено це тим, що коли ми маємо більшу кількість вибірок, інтерполянт, в потрібний момент часу буде точно розрахованим.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Analog Devices. 1999. A Technical Tutorial on Digital Signal Synthesis. 1999.
2. А. Б. Сергиенко "Цифровая обработка сигналов" (второе издание). СПб, Питер, 2006. - 751 с.
3. J. G. Proakis, Digital Communications. New York: McGraw-Hill, 2008.
4. M. Aaron and D. Tufts, "Intersymbol interference and error probability," IEEE Transactions on Information Theory, Jan. 1966.
5. M. Rice, Digital Communications: A Discrete-Time Approach. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2009.
6. Digital Communication Receivers: Synchronization, Channel Estimation, and Signal Processing Heinrich Meyr, Marc Moeneclaey, Stefan A. Fechtel
7. J. Gunther and T. Moon, "Minimum Symbol Error Rate Carrier Phase Recovery of QPSK," IEEE Transactions on Signal Processing, Aug. 2009.
8. Панин В.В. Основы теории информации: учебное пособие для вузов / В.В. Панин. – 2-е изд., испр. И доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 436 с.